



edupixel
unit of success

สรุปคณิต 1 A-LEVEL

ดาวน์โหลดฟรี !

TCAS
67

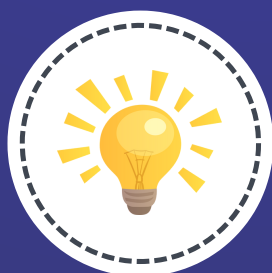
เอกสารโดย

EDUPIXEL / GTRMATH

จัดทำและดำเนินการ

EDUPIXEL  edupixel
unit of success

เอกสารฉบับนี้ห้ามนำไปหาผล
ประโยชน์ในเชิงพาณิชย์โดยเด็ดขาด
จัดทำขึ้นเพื่อเป็นประโยชน์แก่น้อง ๆ
ที่มาเตรียมสอบเท่านั้น !





เนื้อหาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (PAT 1 และ วิชาสามัญ)

เนื้อหา ม.ปลาย		
1. เซต	PAT 1	
2. ตรรกศาสตร์	PAT 1	
3. ระบบจำนวนจริง	PAT 1	วิชาสามัญ
4. ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น		วิชาสามัญ
5. เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย	PAT 1	วิชาสามัญ
6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	PAT 1	
7. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชัน ลอการิทึม	PAT 1	วิชาสามัญ
8. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	PAT 1	วิชาสามัญ
9. เมทริกซ์และระบบสมการเชิงเส้น	PAT 1	วิชาสามัญ
10. เวกเตอร์	PAT 1	วิชาสามัญ
11. จำนวนเชิงซ้อน	PAT 1	วิชาสามัญ
12. ลำดับและอนุกรม	PAT 1	วิชาสามัญ
13. แคลคูลัส	PAT 1	วิชาสามัญ
14. ความน่าจะเป็น	PAT 1	วิชาสามัญ
15. สถิติ	PAT 1	วิชาสามัญ
16. ทักษะกระบวนการ	PAT 1	วิชาสามัญ

*ตอนนี้กลายเป็น A-level ซึ่งรวมทั้งเพิ่มเติมและพื้นฐานเข้าด้วยกันแล้ว



1. เซต

1. x เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $x \in A$
จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n(A)$
2. เซตจำกัด หมายถึง เซตซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์
เซตอนันต์ หมายถึง เซตซึ่งไม่ใช่เซตจำกัด
เซตว่าง หมายถึง เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์ โดยแทนเซตว่าง คือ \emptyset (phi) หรือ $\{ \}$
3. เซตที่เท่ากัน : $A = B$ ก็ต่อเมื่อ เซตทั้งสองมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน และสมาชิกทุกตัวเหมือนกัน
สับเซต (Subset) : $x \subset A$ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B
เพาเวอร์เซต : $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$

สมบัติของสับเซต

1. $A \subset A$ และ $\emptyset \subset A$
2. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
3. ถ้า A เป็นเซตจำกัด แล้ว $n(P(A)) = 2^{n(A)}$
4. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $P(A) \subset P(B)$
5. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ แต่ $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

4. การดำเนินการทางเซต

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

$$A' = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$$

$$A - B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

สมบัติที่ควรทราบ

$$1. \text{ การสลับที่} \quad \blacklozenge A \cup B = B \cup A \quad \blacklozenge A \cap B = B \cap A$$

$$2. \text{ การเปลี่ยนกลุ่ม} \quad \blacklozenge (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \blacklozenge (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$3. \text{ การแจกแจง} \quad \blacklozenge A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\blacklozenge A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



4. เอกลักษณ์
- ◆ $A \cup \emptyset = A$
 - ◆ $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
5. การซ้ำ
- ◆ $A \cup A = A$
 - ◆ $A \cap A = A$
6. คอมพลิเมนต์
- ◆ $A \cup A' = \mathcal{U}$
 - ◆ $A - B = A \cap B'$
 - ◆ $\emptyset' = \mathcal{U}$
 - ◆ $A \cap A' = \emptyset$
 - ◆ $(A')' = A$
 - ◆ $\mathcal{U}' = \emptyset$
7. เดอร์มอร์กอง
- ◆ $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 - ◆ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

5. จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด ใช้สูตรมีดังนี้

$$n(A') = n(\mathcal{U}) - n(A)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

2. ตรรกศาสตร์

1. ตารางแสดงค่าความจริง

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

หมายเหตุ

- $p \wedge q \equiv F$ เมื่อมีหนึ่งตัว F
- $p \vee q \equiv T$ เมื่อมีหนึ่งตัว T
- $p \rightarrow q \equiv F$ เมื่อ $p \equiv T$ และ $q \equiv F$
- $p \leftrightarrow q \equiv T$ เมื่อ $p \equiv q$

2. ประพจน์ที่สมมูลกัน คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี

ประพจน์ p และ q ที่สมมูลกัน เขียนแทนด้วย $p \equiv q$

รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกันที่สำคัญ

1. การสลับที่
 - $p \wedge q \equiv q \wedge p$
 - $p \vee q \equiv q \vee p$
 - $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$



2. การเปลี่ยนกลุ่ม

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$
3. การแจกแจง

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
4. เดอร์มอร์กอง

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$
5. $\sim(\sim p) \equiv p$
6. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
7. $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$

3. สัจนิรันดร์ (Tautology) คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

โดยวิธีการตรวจสอบว่าประพจน์ใดเป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่ ใช้วิธีหาข้อขัดแย้ง ดังนี้

- สมมติให้ประพจน์ให้มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ววิเคราะห์หาค่าความจริงของประพจน์ย่อย
- ถ้ามีข้อขัดแย้งเกิดขึ้น จะสรุปว่า กล่าวว่าเป็นสัจนิรันดร์

ข้อระวัง เนื่องจาก $A \leftrightarrow B$ เป็นเท็จมี 2 กรณี ต้องให้ขัดแย้งทั้งสองกรณีถึงจะสรุปว่าเป็นสัจนิรันดร์ ซึ่งอาจใช้การตรวจสอบว่า A สมมูลกับ B หรือไม่

- ถ้า A สมมูลกับ B $A \leftrightarrow B$ เป็นสัจนิรันดร์
- ถ้า A ไม่สมมูลกับ B จะได้ว่าประพจน์ $A \leftrightarrow B$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

4. ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ (Quantifier)

ประโยค	เป็นจริง	เป็นเท็จ
$\forall x[P(x)]$	x ทุกตัวให้ P(x) จริง	มี x ที่ทำให้ P(x) เท็จ
$\exists x[P(x)]$	มี x ที่ทำให้ P(x) จริง	x ทุกตัวให้ P(x) เท็จ
$\forall x \forall y[P(x,y)]$	(x, y) ทุกคู่ทำให้ P(x, y) จริง	มี (x, y) ที่ทำให้ P(x, y) เท็จ
$\exists x \exists y[P(x,y)]$	มี (x, y) ที่ทำให้ P(x, y) จริง	(x, y) ทุกคู่ทำให้ P(x, y) เท็จ
$\forall x \exists y[P(x,y)]$	x แต่ละตัว มี y ที่ทำให้ P(x,y) จริง	มี x ที่ y ทุกตัว ที่ทำให้ P(x, y) เท็จ
$\exists x \forall y[P(x,y)]$	มี x ที่ y ทุกตัว ที่ทำให้ P(x, y) จริง	x แต่ละตัว มี y ที่ทำให้ P(x,y) เท็จ

5. การสมมูลและนิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณจะสมมูลกัน เมื่อ ตัวบ่งปริมาณชนิดเดียวกัน และ ประโยคเปิดสมมูลกัน
 นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ เมื่อ ตัวบ่งปริมาณคนละชนิดกัน และ ประโยคเปิดเป็นนิเสธกัน
 นั่นคือ $\sim \forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$ และ $\sim \exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$



3. ระบบจำนวนจริง

1. สมบัติของระบบจำนวนจริง

เซตจำนวนจริง (R) ประกอบด้วยเซตของจำนวนตรรกยะ (Q') และเซตของจำนวนตรรกยะ (Q)

เซตของจำนวนตรรกยะ คือเซตที่มีสมาชิกสามารถเขียนในรูปเศษส่วนที่มีตัวเศษและส่วนเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ส่วนไม่เท่ากับศูนย์

สมบัติของระบบจำนวนจริง เกี่ยวกับการบวกและการคูณ ได้แก่ มีสมบัติปิด สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการมีเอกลักษณ์ สมบัติการมีอินเวอร์ส สมบัติการสลับ และสมบัติการแจกแจง

หมายเหตุ

■ สมการหาเอกลักษณ์คือ $a * e = a = e * a$ (หา e ที่กำหระทำกับ a แล้วได้ a)

■ สมการหาอินเวอร์สคือ $a * b = e = b * a$ เมื่อ e (หา b ที่กระทำกับ a แล้วได้เอกลักษณ์ e)

2. การแยกตัวประกอบพหุนาม

กำหนดพหุนาม $P(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

ทฤษฎีบทเศษเหลือ : พหุนาม $P(x)$ หารด้วยพหุนาม $(x - c)$ จะมีเศษเหลือเท่ากับ $P(c)$

ทฤษฎีบทแยกตัวประกอบ : $(x - c)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ก็ต่อเมื่อ $p(c) = 0$

การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ มีวิธีดังนี้

(1) หาตัวประกอบ c ของ a_0 หรือ $\frac{\text{ตัวประกอบของ } a_0}{\text{ตัวประกอบของ } a_n}$ ที่ทำให้ $P(c) = 0$

จะได้ $(x - c)$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

(2) หาร $P(x)$ ด้วย $(x - c)$ สมมติว่าได้ $Q(x)$

(3) นำ $Q(x)$ มาแยกตัวประกอบต่อไปอีก หรือทำตั้งต้นใหม่ดังข้อ (1) และ (2)

ความสัมพันธ์ของตัวหารและเศษของการหารพหุนาม

ถ้า $P(x)$ หารด้วย $Q(x)$ มีผลหารเป็น $A(x)$ เหลือเศษ $R(x)$

จะได้ว่า $P(x) = Q(x) A(x) + R(x)$ โดยที่ $R(x)$ มีดีกรีน้อยกว่าดีกรีของ $Q(x)$



3. สมการพหุนาม

กำหนด $P(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

เรียก $P(x) = 0$ ว่าสมการพหุนามดีกรี n

และเรียก a ที่ทำให้ $P(a) = 0$ ว่าเป็นคำตอบของสมการหรือรากของสมการ

การแก้สมการ

1. สมการดีกรี 1 ใช้สมการบัติการเท่ากัน(ย้ายข้าง)
2. สมการดีกรีสูงกว่าหนึ่ง ให้แยกตัวประกอบ แล้วกำหนดแต่ละตัวประกอบเท่ากับศูนย์

$$\text{ซึ่งสมการดีกรีสองแยกตัวประกอบยากอาจใช้สูตร } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างคำตอบของสมการของพหุนามดีกรี 2 และ ดีกรี 3 (Vieta's formula)

(1) สมการพหุนามดีกรีสอง $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

$$\text{จะมีผลบวกของคำตอบ} = -\frac{b}{a} \quad \text{ผลคูณของคำตอบ} = \frac{c}{a}$$

(2) สมการพหุนามดีกรีสาม $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$

$$\text{จะมีผลบวกของคำตอบ} = -\frac{b}{a} \quad \text{ผลคูณของคำตอบ} = -\frac{d}{a}$$

$$\text{ผลบวกของผลคูณทีละ 2 ราก} = \frac{c}{a}$$

4. ช่วงและการแก้สมการ

ช่วง หมายถึง สับเซตของจำนวนจริง

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$$

สมบัติของอสมการที่ควรรู้

1. $a \leq b$ หมายถึง $a < b$ หรือ $a = b$
2. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
3. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
4. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$
5. $a < x < b$ หมายถึง $a < x$ และ $x < b$



การแก้อสมการ

1. อสมการดีกรี 1 แก่เหมือนสมการดีกรี 1 แต่ต้องระวังการคูณทั้งสองข้างด้วยจำนวนลบ เครื่องหมายเปลี่ยนเป็นตรงข้าม

2. อสมการดีกรีมากกว่าหนึ่ง

- ⇒ จัดอสมการให้ด้านใดด้านหนึ่งเป็น 0
- ⇒ แยกตัวประกอบ จับทุกตัวประกอบเท่ากับ 0 เพื่อหาค่าวิกฤต
- ⇒ แล้วจุดลงบนเส้นจำนวน และ ทดสอบค่า + หรือ - ของแต่ละช่วง
- ⇒ อสมการ $>$ และ \geq เอาช่วงบวก ส่วนอสมการ $<$, \leq เอาช่วงลบ

3. อสมการเศษส่วนพหุนาม

- ⇒ จัดด้านใดด้านหนึ่งให้เป็น 0 (ห้ามตัวแปรคูณไขว้)
- ⇒ ให้แยกตัวประกอบทั้งเศษและส่วน จับทุกตัวประกอบเท่ากับ 0 เพื่อหาค่าวิกฤต
- ⇒ จุดลงบนเส้นจำนวน และ ทดสอบค่า + หรือ - ของแต่ละช่วง
- ⇒ อสมการ $>$ และ \geq เอาช่วงบวก ส่วนอสมการ $<$, \leq เอาช่วงลบ

ส่วนค่าวิกฤตใดมาจากส่วน ค่าวิกฤตนั้นจะไม่ใช่คำตอบอสมการเสมอ

หมายเหตุ ถ้าต้องการให้เครื่องหมายสลับกันในแต่ละช่วง ตัวประกอบไหนซ้ำกันเป็นจำนวนคู่ ให้ลงจุดค่าวิกฤตนั้น 2 ครั้ง ส่วนตัวประกอบไหนซ้ำกันเป็นจำนวนคี่ ให้ลงจุดค่าวิกฤตนั้นครั้งเดียว

5. ค่าสัมบูรณ์และสมบัติของค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์ของ a แทนด้วย $|a|$ โดยที่ $|a| = \begin{cases} -a & ; a < 0 \\ a & ; a \geq 0 \end{cases}$

“ถ้าข้างในแอบเป็นลบถอดแล้วติดลบ แต่ ถ้าข้างในแอบเป็นบวกถอดได้เลย”

สมบัติของค่าสัมบูรณ์

1. $|x| = |-x|$
2. $|x|^2 = x$
3. $|x| \geq 0$
4. $|x| \geq x$
5. $|xy| = |x||y|$
6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ โดยที่ $|y| \neq 0$
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$
8. $|x - y| \geq ||x| - |y||$



หลักการแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ :

หลักการ คือ กำจัดค่าสัมบูรณ์ออกจากสมการหรืออสมการ

1. ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้

สมการ $|\square| = a$ หาคำตอบได้จากสมการ $\square = a$ หรือ $\square = -a$

อสมการ $|\square| < a$ หาคำตอบได้จากอสมการ $-a < \square$ และ $\square < a$

อสมการ $|\square| > a$ หาคำตอบได้จากอสมการ $-a > \square$ หรือ $\square > a$

2. $|D| = |W| \implies D^2 = W^2$

$|D| < |W| \implies D^2 < W^2$

3. ถ้าสมการหรืออสมการมีค่าสัมบูรณ์เป็นส่วนๆ การกำจัดค่าสัมบูรณ์ต้องแยกเป็นกรณี ดังนี้

(1) ถ้า $\square \geq 0$ จะได้ $|\square| = \square$

(2) ถ้า $\square < 0$ จะได้ $|\square| = -\square$

หลังจากนั้นหาเซตคำตอบของแต่ละสมการหรืออสมการของแต่ละกรณีแล้วนำมายูเนียนกัน

6. ขอบเขตบนน้อยสุดและขอบเขตล่างมากที่สุด

ขอบเขตบน(upper bound) ของเซตใด คือ จำนวนที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับจำนวนทุกจำนวนที่เป็นสมาชิกในเซตนั้น และค่าน้อยที่สุดเรียกว่า **ขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bound)**

ขอบเขตล่าง(lower bound) ของเซตใด คือ จำนวนที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนทุกจำนวนที่เป็นสมาชิกในเซตนั้นและค่ามากที่สุดในเซตเรียกว่า **ขอบเขตล่างมากที่สุด(greatest lower bound)**



4. ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

1. การหารลงตัว

b หาร a ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $a = bc$ โดยเขียนแทนด้วย $b \mid a$
เรียก b ว่าเป็น **ตัวหาร (divisor)** ของ a และเรียก a ว่าเป็น **พหุคูณ (multiple)** ของ b

2. ทฤษฎีบทหลักมูลทางเลขคณิต

กำหนดให้ n จำนวนเต็มบวกทุกจำนวนที่มากกว่า 1 จะได้ว่า $n = p_1^{q_1} \times p_2^{q_2} \times p_3^{q_3} \times \dots \times p_k^{q_k}$
ซึ่ง $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$ เป็นจำนวนเต็ม
และเรียกว่า **การแยกตัวประกอบของ n**
จำนวนของตัวประกอบที่เป็นบวกทั้งหมดของ n เท่ากับ $(q_1+1) \times (q_2+1) \times \dots \times (q_k+1)$ จำนวน

3. ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $b \neq 0$ แล้วจะมีจำนวนเต็ม q และ r ชุดเดียวซึ่ง
 $a = bq + r$ โดย $0 \leq r < |b|$
เรียก q ว่า ผลหาร (quotient) และ r ว่า เศษเหลือ (remainder)

4. ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

ตัวหารร่วมมาก ของ a และ b คือ จำนวนเต็มบวก d ที่มีค่ามากที่สุด ซึ่ง $d \mid a$ และ $d \mid b$
และเขียนแทนด้วย (a, b) แทน ห.ร.ม. ของ a และ b
เรียกจำนวน a, b ที่มี ห.ร.ม. เป็น 1 ว่าเป็น **จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์**

ตัวคูณร่วมน้อย ของ a และ b คือ จำนวนเต็มบวก c ที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่ง $a \mid c$ และ $b \mid c$
และเขียนแทนด้วย $[a, b]$ แทน ค.ร.น. ของ a และ b

สมบัติของ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. $(a, b) \times [a, b] = |ab|$

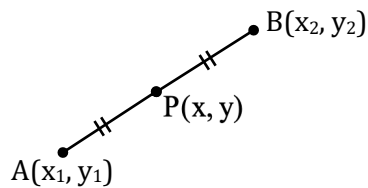


5. เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

1. สูตรพื้นฐานเรขาคณิตวิเคราะห์

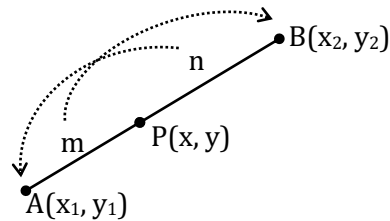
(1) จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

$$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



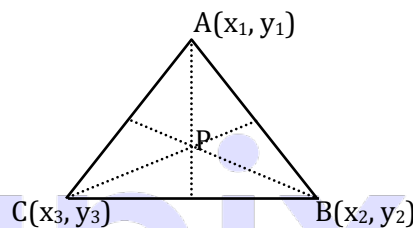
(2) จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง

$$P(x, y) = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \right)$$



(3) จุดตัดกันของเส้นมัธยฐาน

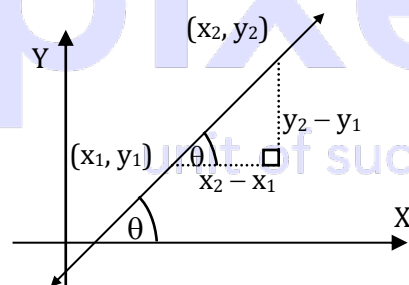
$$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$



(4) ความชันของเส้นตรง

$$\text{ความชัน}(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

หรือ $m = \tan \theta$



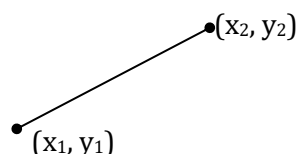
(5) สมการเส้นตรง

- รูปทั่วไป $Ax + By + C = 0$ จะได้ความชัน $(m) = -\frac{A}{B}$
- สมการเส้นตรงที่มี ความชัน $= m$ และ ผ่านจุด (x_1, y_1) คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$
- ถ้าเส้นตรงตัดแกน x และตัดแกน y ที่จุด $(a, 0)$ และ $(0, b)$ ตามลำดับ จะได้ระยะตัดแกน x คือ a และระยะตัดแกน y คือ b ตามลำดับ
- ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรง
 - (1) $L_1 // L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_{L_1} = m_{L_2}$
 - (2) $L_1 \perp L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_{L_1} \cdot m_{L_2} = -1$ หรือ $m_{L_1} = 0$ และ m_{L_2} หาค่าไม่ได้

(6) การวัดระยะทาง

■ ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

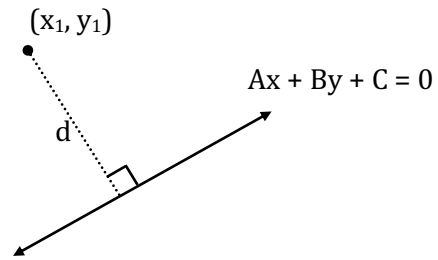
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$





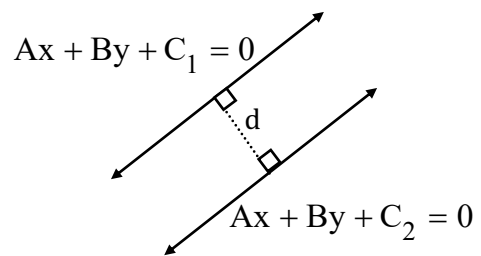
■ ระยะทางระหว่างจุดและเส้นตรง

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



■ ระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



(7) พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม ให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$ เป็นจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยม

$$\text{พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times |\text{บน} - \text{ล่าง}|$$

$x_2y_1 + x_3y_2 + \dots + x_1y_n$
 $x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1$

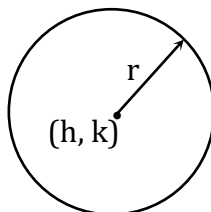
2. ภาคตัดกรวย

2.1 วงกลม (Circle) คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบที่ห่างจากจุดคงที่เป็นระยะทางเท่ากัน

สมการมาตรฐาน $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ จุดศูนย์กลางคือ (h, k) และ รัศมี คือ r

สมการรูปทั่วไป $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

จุดศูนย์กลางคือ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ และ รัศมี $= \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F}$



2.2 พาราโบลา (Parabola) คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง (ไดเรกตริกซ์)

และจุดคงที่จุดหนึ่ง (โฟกัส) เป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

■ พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรขนานแกน y

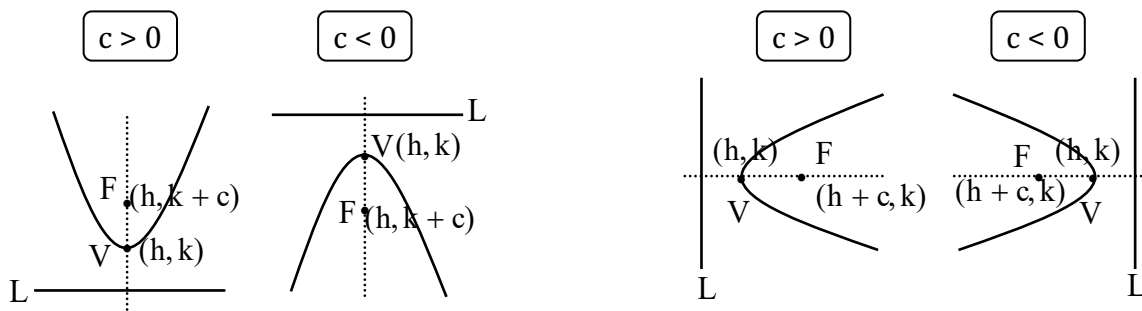
สมการทั่วไป $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$

สมการมาตรฐาน $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

■ พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรขนานแกน x

สมการทั่วไป $Ay^2 + By + Cx + D = 0$

สมการมาตรฐาน $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

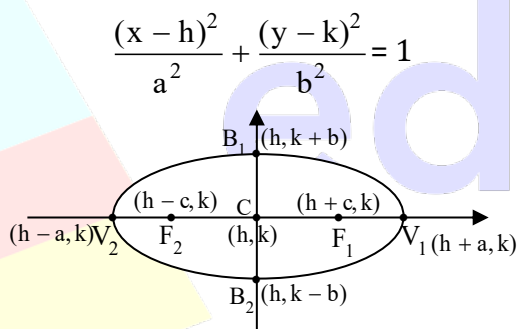


- สมบัติ**
- ระยะ $VF = |c|$ และ ระยะจาก V ไปเส้นไดเรกตริกซ์ L เท่ากับ $|c|$
 - ความกว้าง หรือ ความยาวลาตัสเรกตัมของพาราโบลา เท่ากับ $|4c|$

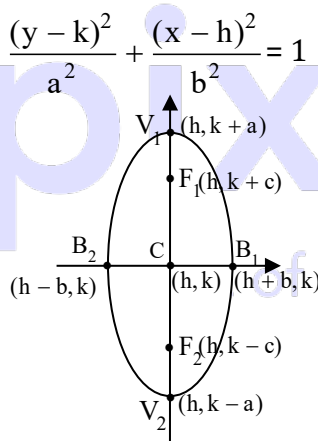
2.3 วงรี (Ellipse) คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุด (โฟกัส) มีค่าคงที่เสมอ และเท่ากับ $2a$

สมการทั่วไปคือ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ เมื่อ $A \neq B$ และ $AB > 0$

■ วงรีที่มีแกนเอกขนานกับ แกน X



■ วงรีที่มีแกนเอกขนานกับ แกน Y



- สมบัติ**
- ความยาวแกนเอก = $V_1V_2 = 2a$, ความยาวแกนโท = $B_1B_2 = 2b$ และ $F_1F_2 = 2c$
 - $a^2 = b^2 + c^2$ (a มากที่สุด)
 - ความเยื้องศูนย์กลางกลาง $e = \frac{c}{a}$
 - ความกว้าง หรือ ความยาวลาตัสเรกตัมของวงรี เท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

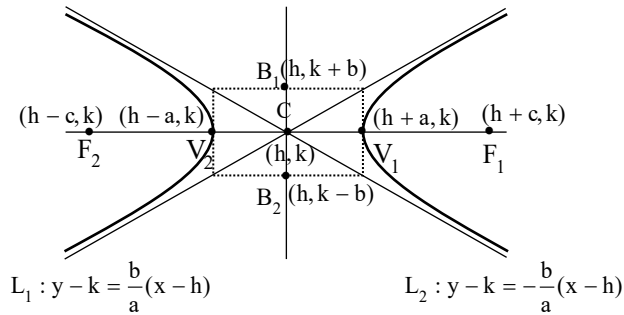
2.4 ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดนี้ไปยังจุดคงที่สองจุด (โฟกัส) ในระนาบมีค่าคงที่เสมอ และมีค่าเท่ากับ $2a$

สมการทั่วไป คือ $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$ เมื่อ $A \neq B$ และ $AB < 0$



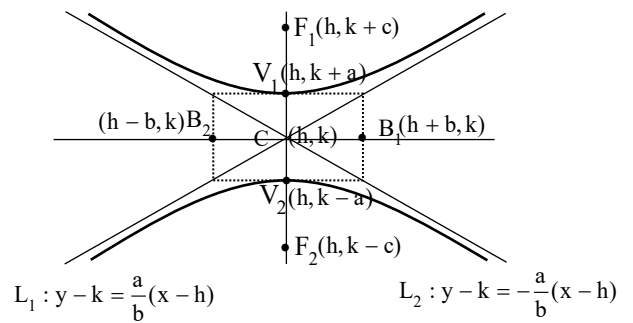
ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางขนานแกน X

$$\text{สมการ คือ } \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางขนานแกน Y

$$\text{สมการ คือ } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



- สมบัติ
- ความยาวตามขวาง = $V_1V_2 = 2a$, ความยาวสังยุค = $B_1B_2 = 2b$ และ $F_1F_2 = 2c$
 - $c^2 = a^2 + b^2$ (c มากที่สุด)
 - ความกว้าง หรือ ความยาวลาตัสเรกตัมของไฮเพอร์โบล่า เท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

1. ผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian product)

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

$$n(A \times B) = n(A)n(B)$$

2. ความสัมพันธ์ (relation) r เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$

3. ฟังก์ชัน คือความสัมพันธ์ซึ่งไม่มีคู่อันดับสองคูใด ๆ ในความสัมพันธ์ที่มีสมาชิกข้างหน้าเหมือนกันแต่มีสมาชิกตัวหลังต่างกัน นั่นคือ

r จะเป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อทุก $(x_1, y_1) \in r$ และ $(x_2, y_2) \in r$ แล้ว $y_1 = y_2$

r จะเป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ เส้นตรงใดที่ตั้งฉากกับแกน x ตัดกราฟของ r ครั้งเดียวเสมอ

เทคนิคการหาค่าฟังก์ชัน

- ถ้าให้ $f(x)$ มา จะหา $f(W)$ แทน x ด้วย W
- ถ้าให้ $f(W)$ มา จะหา $f(x)$ ให้สมมติ $W = A$ แล้วจัด x ในรูปของ A แล้วจัดรูปให้อยู่ในรูป A แล้วเปลี่ยนตัวแปร A เป็น x ก็จะได้ $f(x)$



4. โดเมน(D_r) และ เรนจ์(R_r)

หาโดเมน $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$	หาเรนจ์ $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$
<ul style="list-style-type: none"> ■ จัดสมการให้อยู่ในรูป $y =$ เทอมของ x ■ โดยดูว่า x มีค่าอะไรได้บ้าง ที่ทำให้ y เป็นจริง 	<ul style="list-style-type: none"> ■ จัดสมการให้อยู่ในรูป $x =$ เทอมของ y ■ โดยดูว่า y มีค่าอะไรได้บ้าง ที่ทำให้ x เป็นจริง

ความรู้ที่ใช้ในการหาโดเมนและเรนจ์

$$(1) f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \text{ หาค่าได้เมื่อ } B(x) \neq 0$$

$$(2) f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

ถ้า n เป็นจำนวนคู่ $f(x)$ หาค่าได้เมื่อ $g(x) \geq 0$

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ $f(x)$ หาค่าได้เมื่อ $g(x)$ เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$(3) f(x) = a^{g(x)} \text{ หาค่าได้เมื่อ } g(x) \text{ เป็นจำนวนจริงใดๆ}$$

$$(4) f(x) = \log_a g(x) \text{ หาค่าได้เมื่อ } g(x) > 0$$

5. อินเวอร์สของความสัมพันธ์ และฟังก์ชันอินเวอร์ส

(1) ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B แล้วอินเวอร์สของความสัมพันธ์ ซึ่งแทนด้วย

สัญลักษณ์ r^{-1} คือ ความสัมพันธ์จาก B ไป A

$$r = \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \in r\}$$

$$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid (y, x) \in r\} \text{ (สลับ } x, y \text{ ในเงื่อนไข)}$$

(2) ฟังก์ชันอินเวอร์ส (Inverse Functions) คือ อินเวอร์สของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชัน

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f^{-1}

$$\text{ถ้า } f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$

$$\text{จะได้ } f^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid x = f(y)\} \text{ (สลับ } x, y \text{ ในเงื่อนไข)}$$

การหาฟังก์ชันอินเวอร์ส

ขั้นที่ 1 จาก $y = f(x)$ จัด x ในรูปของ y พร้อมกับ หาเรนจ์ของ f

ขั้นที่ 2 เปลี่ยน x เป็น y และเปลี่ยน y เป็น x พร้อมเขียนโดเมนของ $f^{-1} (x \in R_f)$

สมบัติของฟังก์ชันอินเวอร์สที่ควรรู้

1. f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1

$$2. D_{f^{-1}} = R_f \text{ และ } R_{f^{-1}} = D_f$$

$$3. \text{ ถ้า } f(V) = W \text{ แล้ว } f^{-1}(W) = V$$

4. กราฟของ f และ f^{-1} จะสมมาตรเทียบกับเส้นตรง $y = x$



6. ฟังก์ชันคอมโพสิท(Composite Functions) หรือฟังก์ชันเชิงประกอบ

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ จะได้ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

โดเมนและเรนจ์ของ $g \circ f$

$$D_{g \circ f} = (D_{g \circ f} \text{ ที่หาได้}) \cap D_f \text{ และ } R_{g \circ f} = (R_{g \circ f} \text{ ที่หาได้}) \cap R_f$$

สมบัติที่ควรรู้

$$\blacklozenge (f \circ f^{-1})(x) = x \text{ เมื่อ } x \in R_f$$

$$\blacklozenge (f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ เมื่อ } x \in D_f$$

7. พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of Functions)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันในเซตของจำนวนจริง สำหรับ $x \in D_f \cap D_g$

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

หมายเหตุ $D_{f \pm g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

edupixel
unit of success



7. ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม

1. รากที่สองของจำนวนจริง(กรณีที่สอง)

กรณีที่สองของ a เขียนแทนด้วย \sqrt{a} ซึ่ง \sqrt{a} หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $a \geq 0$

สมบัติที่ควรรู้

- ◆ $\sqrt{a^2} = |a|$
- ◆ $(\sqrt{a})^2 = a$ เมื่อ $a \geq 0$

หลักการแก้สมการและอสมการรากที่สอง

(1) ต้องกำจัดรากที่สองให้หมดไปโดยการยกกำลังสองทั้งสองข้าง

(2) จัดรูปตัวแปรใหม่ให้อยู่ในรูปสมการพหุนาม หรือจะใช้สมบัติ $\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = |\sqrt{a} \pm \sqrt{b}|$

หมายเหตุ ต้องมีเงื่อนไขที่ค่าในรากที่สองต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

2. สมบัติของเลขยกกำลัง

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$

- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

- $a^m \times b^m = (ab)^m$

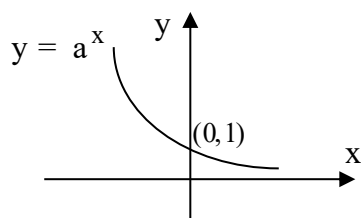
- $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

- $(a^m)^n = a^{mn}$

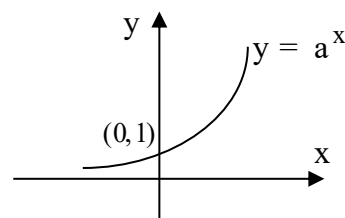
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

- $a^0 = 1, a \neq 0$

2. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = a^x \text{ เมื่อ } a > 0 \text{ และ } a \neq 1\}$



$0 < a < 1$ (เป็นฟังก์ชันลด)



$a > 1$ (เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

สมบัติที่ควรทราบ

1. $f(x) = a^x$ เป็นฟังก์ชันชนิด 1 - 1

2. $D_f = (-\infty, \infty)$ $R_f = (0, \infty)$

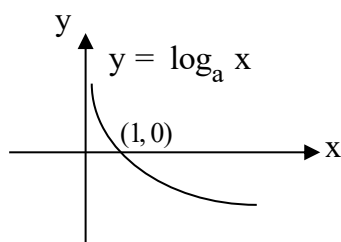


การแกสมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล

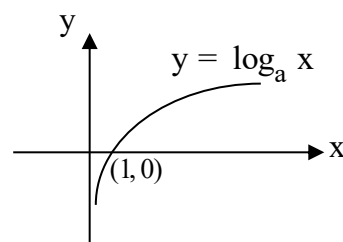
1. ถ้า $a^W = a^D$ จะได้ว่า $W = D$
2. ถ้า $0 < a < 1$ และ $a^W < a^D$ จะได้ว่า $W > D$ (ฐาน <1 เปลี่ยนเครื่องหมาย)
ถ้า $a > 1$ และ $a^W < a^D$ จะได้ว่า $W < D$ (ฐาน >1 เครื่องหมายเหมือนเดิม)

หมายเหตุ ข้อสอบมักออกข้อสอบให้จัดรูปสมการหรืออสมการในรูปพหุนามดีกรีสองที่จะต้องแยกตัวประกอบก่อน

2. ฟังก์ชันลอการิทึม $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \log_a x \text{ เมื่อ } a > 0 \text{ และ } a \neq 1\}$



$0 < a < 1$ (เป็นฟังก์ชันลด)



$a > 1$ (เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

สมบัติที่ควรทราบ

1. $f(x) = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1
2. $D_f = (0, \infty)$ $R_f = (-\infty, \infty)$
3. $\log_{10} x$ เขียนแทนด้วย $\log x$ และ $\log_e x$ เขียนแทนด้วย $\ln x$ เมื่อ $e \approx 2.7183 \dots$

การแกสมการและอสมการลอการิทึม

1. ถ้า $\log_a W = \log_a D$ จะได้ว่า $W = D$
2. ถ้า $0 < a < 1$ และ $\log_a W < \log_a D$ จะได้ว่า $W > D$ (ฐาน <1 เปลี่ยนเครื่องหมาย)
ถ้า $a > 1$ และ $\log_a W < \log_a D$ จะได้ว่า $W < D$ (ฐาน >1 เครื่องหมายเหมือนเดิม)

หมายเหตุ

- ต้องตรวจสอบคำตอบสมการและอสมการทุกครั้ง ว่าค่าหลัง \log เป็นบวกไหม
- ข้อสอบมักออกข้อสอบให้จัดรูปสมการหรืออสมการในรูปพหุนามดีกรีสองที่จะต้องแยกตัวประกอบก่อน

คุณสมบัติที่สำคัญของลอการิทึม

1. ถ้า $\log_a x = y$ จะได้ $x = a^y$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a a = 1$



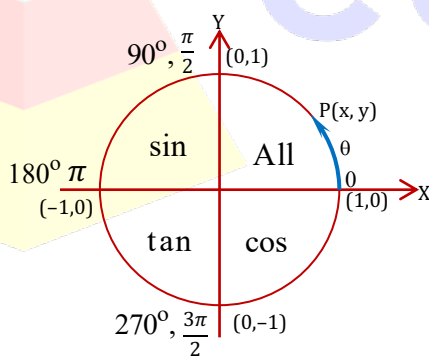
4. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (log ผลคูณ = ผลบวกของ log)
5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (log ผลหาร = ผลต่างของ log)
6. $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$
7. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = \frac{\log_b a}{\log_b x}$
8. $a^{\log_a x} = x$
9. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

8. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. อัตราส่วนตรีโกณมิติ

$$\sin \theta = \frac{\text{ข้ามมุม}}{\text{ข้ามฉาก}} \quad \cos \theta = \frac{\text{ชิดมุม}}{\text{ข้ามฉาก}} \quad \tan \theta = \frac{\text{ข้ามมุม}}{\text{ชิดมุม}}$$

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติจากวงกลมหนึ่งหน่วย



วงกลมหนึ่งหน่วย คือ วงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 = 1$

เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ

จะได้ $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$

$$\text{และ } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

3. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มุมขนาดต่างๆที่ควรรู้

ฟังก์ชัน	$0^\circ, 0$	$30^\circ, \frac{\pi}{6}$	$45^\circ, \frac{\pi}{4}$	$60^\circ, \frac{\pi}{3}$	$90^\circ, \frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	หาไม่ได้



สมบัติเพิ่มเติม

■ $\sin\theta, \cos\theta \in [-1,1]$

■ $\tan\theta \in (-\infty, \infty)$

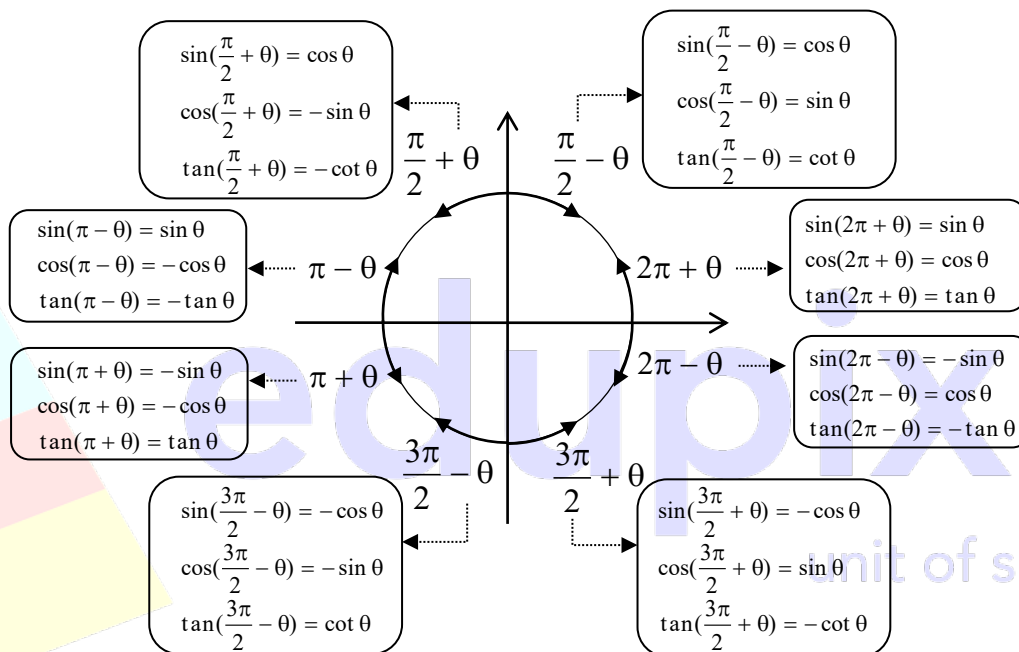
4. ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อมุมที่ขนาดเป็นลบ

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

5. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\pi \pm \theta, 2\pi \pm \theta, \frac{\pi}{2} \pm \theta, \frac{3\pi}{2} \pm \theta$



6. เอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(1) เอกลักษณ์กำลังสอง

■ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

■ $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

■ $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

(2) ผลบวกและผลต่างของมุม

■ $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

■ $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

■ $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

■ $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

■ $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$, $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(3) สองเท่าของมุม

■ $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$



$$\blacksquare \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\blacksquare \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

หมายเหตุ จากสูตร $\cos 2A$ จะได้ $\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$, $\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$

(4) ครึ่งของมุม

$$\blacksquare \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\blacksquare \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\blacksquare \tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$$

(5) สามเท่าของมุม

$$\blacksquare \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\blacksquare \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$\blacksquare \tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

(6) แปลงผลคูณฟังก์ชันเป็นผลบวกฟังก์ชัน

$$\blacksquare 2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

$$\blacksquare 2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$$

$$\blacksquare 2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

$$\blacksquare 2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

(7) แปลงผลบวกฟังก์ชันเป็นผลคูณฟังก์ชัน

$$\blacksquare \sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A + B}{2}\right) \cos\left(\frac{A - B}{2}\right)$$

$$\blacksquare \sin A - \sin B = 2 \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) \sin\left(\frac{A - B}{2}\right)$$

$$\blacksquare \cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) \cos\left(\frac{A - B}{2}\right)$$

$$\blacksquare \cos A - \cos B = -2 \sin\left(\frac{A + B}{2}\right) \sin\left(\frac{A - B}{2}\right)$$



7. อินเวอร์ส(ค่าผกผัน)ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(1) เรนจ์ของอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\arcsin x, \operatorname{arccosec} x, \arctan x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos x, \operatorname{arcsec} x, \operatorname{arccot} x \in [0, \pi]$$

(2) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$; $-1 \leq x \leq 1$
 $\arctan(-x) = -\arctan x$; $x \in \mathbb{R}$
 $\operatorname{arccosec}(-x) = -\operatorname{arccosec} x$; $x \leq -1, x \geq 1$
 $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$; $-1 \leq x \leq 1$
 $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$; $x \in \mathbb{R}$
 $\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$; $x \leq -1, x \geq 1$

(3) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; $-1 \leq x \leq 1$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$
 ; $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccosec} x = \frac{\pi}{2}$$
 ; $x \leq -1, x \geq 1$

(4) $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$; $|xy| < 1$

$$\arctan x + \arctan y = \pi + \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$
 ; $|xy| > 1$

เทคนิคการแก้โจทย์เกี่ยวกับฟังก์ชันอินเวอร์สตรีโกณมิติ

ใช้สมบัติเกี่ยวกับอินเวอร์สฟังก์ชันที่ว่า

$$\blacklozenge (f \circ f^{-1})(a) = a \text{ และ } (f^{-1} \circ f)(a) = a$$

$$\blacklozenge \text{ ถ้า } f^{-1}(a) = x \text{ แล้ว } f(x) = a$$

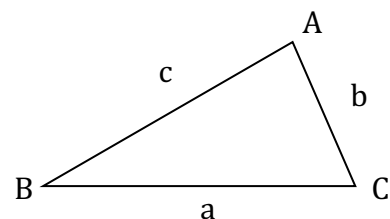
8. กฎของไซน์และโคไซน์

กฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

กฎของไซน์ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$



เมื่อ r เป็นความยาวรัศมีของวงกลมที่ผ่านจุด A, B และ C



สูตรโปรเจกชัน

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

สูตรหาพื้นที่สามเหลี่ยม

$$\text{พื้นที่ } \Delta ABC = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

สูตรพื้นที่สามเหลี่ยมของเฮลอน(Hero's Formula)

$$\text{พื้นที่ } \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{เมื่อ } s = \frac{a+b+c}{2}$$

9. เมทริกซ์และระบบสมการเชิงเส้น

1. เมทริกซ์

(1) ความหมายและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมี m แถว n หลัก จะกล่าวว่า เมทริกซ์ A มีมิติ $m \times n$

เขียนแทนด้วย $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ โดยที่ a_{ij} แทนสมาชิกของ A ในแถวที่ i หลักที่ j

(2) การเท่ากันของเมทริกซ์

กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

$A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุก ๆ $i, j = 1, 2, 3, \dots, m$

(3) เมทริกซ์บางชนิดที่ควรรู้

- เมทริกซ์จัตุรัส เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและหลักเท่ากัน
- เมทริกซ์ศูนย์ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ทั้งหมด และใช้สัญลักษณ์ O
- เมทริกซ์เอกลักษณ์ คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุม หลักมีค่าเป็น 1 ส่วนสมาชิกอื่นๆที่เหลือมีค่าเป็น 0 ทั้งหมด ใช้ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีมิติ $n \times n$

$$\text{เช่น } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) ทรานสโพสของเมทริกซ์ A^t คือเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำเอาสมาชิกในแถวที่ i มาสลับเป็นหลักที่ i

(5) การบวกเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน**



$A + B$ คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกแต่ละเป็นผลบวกของสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันของ A และ B
สมบัติการบวกของเมทริกซ์

มีสมบัติปิด การเปลี่ยนกลุ่มได้ การสลับที่ได้ มีเอกลักษณ์การบวกคือ 0 และมีอินเวอร์การบวก

(6) การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ และ $B = [b_{ij}]_{q \times n}$ ผลคูณระหว่างเมทริกซ์ A และ B จะเกิดขึ้นได้

ก็ต่อเมื่อ $p = q$ และผลคูณที่ได้จะมีมิติ $m \times n$ นั่นคือ

$$A \times B = [a_{ij}]_{m \times p} \times [b_{ij}]_{q \times n} = [c_{ij}]_{m \times n}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{p=q}$

เมื่อ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

(สมาชิกแถวที่ i ของ A คูณ กับสมาชิกหลักที่ j ของ B)

(7) การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ kA คือเมทริกซ์ที่เกิดจากการคูณ k กับสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ A

(8) ตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ 2×2

ตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A คือ A^{-1} โดย $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ แล้ว } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ ● ถ้า $\det A \neq 0$ จะหา A^{-1} ได้ และเรียก A ว่า เมทริกซ์ไม่เอกฐาน

● ถ้า $\det A = 0$ จะหา A^{-1} ไม่ได้ และเรียก A ว่า เมทริกซ์เอกฐาน

(9) สมบัติบางประการที่ต้องรู้

1. $(AB)C = A(BC)$

2. $A(B + C) = AB + AC$

3. $AI_n = I_n A = A$

4. $(A^t)^t = A$

5. $(kA)^t = kA^t$

6. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$

7. $(AB)^t = B^t A^t$

8. $(A^{-1})^{-1} = A$

9. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

10. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

11. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$



ข้อควรระวัง

1. AB และ BA ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน
2. $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
3. $(A - B)(A + B) = A^2 + BA - AB - B^2$
4. ถ้า $AB = \underline{0}$ ไม่จำเป็นที่ $A = \underline{0}$ หรือ $B = \underline{0}$
5. ถ้า $AB = AC$ โดย $A \neq \underline{0}$ ไม่จำเป็นที่ $B = C$

2. ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

- เมทริกซ์ที่มีมิติ 1×1 แล้ว $\det(A) =$ สมาชิกของเทริกซ์

- เมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 แล้ว $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (คูณลง - คูณขึ้น)

- เมทริกซ์ที่มีมิติ 3×3 แล้ว $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$
(คูณลง - คูณขึ้น)

- เมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ จะได้ $\det = \sum a_{ij} C_{ij}$ (กระจายโคแฟกเตอร์)

กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

ไมเนอร์ ($M_{ij}(A)$) คือ \det (เมทริกซ์ที่เหลือจากตัดแถว i หลัก j ของเมทริกซ์ A)

โคแฟกเตอร์ ($C_{ij}(A)$) = $(-1)^{i+j} M_{ij}(A)$

สมบัติบางข้อของดีเทอร์มิแนนต์

1. $\det(A) = \det(A^t)$
2. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
3. $\det(A^m) = (\det(A))^m$
4. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
5. $\det(kA) = k^n \det(A)$
6. $\det I_n = 1$
7. ถ้า A มีสมาชิกทุกตัวในแถว(หลัก) เป็น 0 ทั้งหมด จะได้ว่า $\det(A) = 0$
8. ถ้า A มีสมาชิกในสองแถว(หรือในสองหลัก)ใดเท่ากัน จะได้ว่า $\det(A) = 0$
9. ถ้า B เกิดจาก A โดยการสลับแถวคู่ใดคู่หนึ่ง (หรือสลับหลักคู่ใดคู่หนึ่ง) แล้ว $\det B = -\det A$
10. ถ้า B เกิดจาก A โดยการคูณแถวหนึ่ง(หรือหลักหนึ่ง)ด้วย k แล้ว $\det(B) = k \det(A)$
11. ถ้า B เกิดจาก A โดยการคูณแถวหนึ่ง (หลักหนึ่ง) ด้วยค่าคงตัวแล้วนำไปบวกกับแถวหนึ่ง (หลักหนึ่ง) จะได้ว่า $\det(B) = \det(A)$



3. อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

- เมทริกซ์ผกผัน(**adjoint matrix**) แทนด้วย $\text{adj}(A)$ โดยที่ $\text{adj}(A) = [C_{ij}(A)]^t$
 - อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ ถ้า $\det(A) \neq 0$ จะได้ว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$
- ข้อควรจำ
- $A \text{adj}(A) = \text{adj}(A) A = \det(A) I$
 - $\det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$

4. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ ทำได้ 3 วิธี

กำหนดระบบสมการเชิงเส้นจัดในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = B$

(1) การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว คำตอบของระบบสมการ คือ $X = A^{-1}B$

(2) การแก้สมการโดยใช้ กฎของคราเมอร์ (Cramer's rule)

ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว คำตอบของระบบสมการนี้คือ

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

โดยที่ A_i เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ B ไปแทนที่หลักที่ i ของ A เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

(3) การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการตามแถว(Row Operations)

การปฏิบัติการตามแถว สามารถทำได้ ดังนี้

R_{ij} แทนการสลับที่ระหว่างแถวที่ i กับแถวที่ j

kR_i แทนการคูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ i ด้วย k

$R_i + kR_j$ แทนการเปลี่ยนแถวที่ i โดยการนำ k คูณสมาชิกแถวที่ j แล้วนำผลไปบวกกับสมาชิกในลำดับเดียวกันของแถวที่ i

ขั้นตอนการแก้ระบบสมการ จากระบบสมการ $AX = B$

- สร้างเมทริกซ์แต่งเติม $[A | B]$
- ดำเนินการตามแถว เปลี่ยนเมทริกซ์แต่งเติมให้อยู่ในรูป $[C | I]$ จะได้ $X = C$

หมายเหตุ

- ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้ดำเนินการตามแถวบน เมทริกซ์ A จะกล่าวว่า A สมมูลตามแถวกับ B และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \sim B$
- จากการดำเนินการตามแถว $[A | I] : [I | B]$ จะได้ $B = A^{-1}$



10. เวกเตอร์

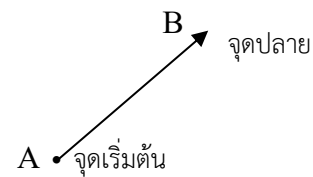
1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเวกเตอร์

(1) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐานในสามมิติ ได้แก่ $\bar{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\bar{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) เวกเตอร์จากจุด 2 จุด กำหนด $A(x, y, z)$, $B(a, b, c)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a-x \\ b-y \\ c-z \end{bmatrix} = (a-x)\bar{i} + (b-y)\bar{j} + (c-z)\bar{k}$$

● ข้อสังเกต $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$



(3) ขนาดของเวกเตอร์ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ จะได้ $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

(4) การขนานกันของเวกเตอร์ $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$: $\bar{u} \parallel \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อมี $k \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $\bar{u} = k\bar{v}$

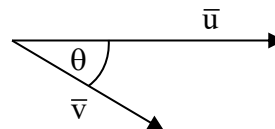
ถ้า $\bar{u} = k\bar{v}$ โดยที่ \bar{u} และ \bar{v} ขนานในทิศทางเดียวกัน แสดงว่า $k > 0$

ถ้า $\bar{u} = k\bar{v}$ โดยที่ \bar{u} และ \bar{v} ขนานในทิศทางตรงข้าม แสดงว่า $k < 0$

ถ้า $\bar{u} = k\bar{v}$ โดยที่ \bar{u} และ \bar{v} ไม่ขนานกัน แสดงว่า $k = 0$

(5) มุมระหว่างเวกเตอร์ : มุมระหว่าง \bar{u} และ \bar{v} คือมุมที่มีจุดเริ่มต้นของสองเวกเตอร์เป็นจุดยอดมุม

โดยมุมขนาดตั้งแต่ 0° ถึง 180° ดังรูป



(6) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ \bar{u} เท่ากับ $\pm \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

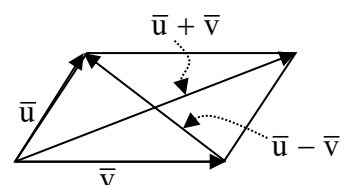
เวกเตอร์ขนาด k หน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ \bar{u} คือ $\frac{k\bar{u}}{|\bar{u}|}$

2. การบวก การลบ การคูณด้วยสเกลาร์ การคูณเวกเตอร์

ให้ $\bar{u} = a_1\bar{i} + b_1\bar{j} + c_1\bar{k}$, $\bar{v} = a_2\bar{i} + b_2\bar{j} + c_2\bar{k}$ และ $m \in \mathbb{R}$

(1) การบวก ลบ เวกเตอร์

$$\bar{u} \pm \bar{v} = \begin{bmatrix} a_1 \pm a_2 \\ b_1 \pm b_2 \\ c_1 \pm c_2 \end{bmatrix} = (a_1 \pm a_2)\bar{i} + (b_1 \pm b_2)\bar{j} + (c_1 \pm c_2)\bar{k}$$



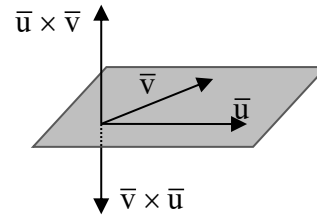


(2) การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์: $m\vec{u} = \begin{bmatrix} ma_1 \\ mb_1 \\ mc_1 \end{bmatrix} = (ma_1)\vec{i} + (mb_1)\vec{j} + (mc_1)\vec{k}$

(3) ผลคูณเชิงสเกลาร์ หรือ **dot product**: $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

(4) ผลคูณเชิงเวกเตอร์ หรือ **cross product**:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (\text{ทำเหมือน det})$$



3. สมบัติที่ควรรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, $\vec{u} - \vec{v} = -(\vec{v} - \vec{u})$, $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

(2) $m(\vec{u} \pm \vec{v}) = m\vec{u} \pm m\vec{v}$, $(m\vec{u}) \cdot (n\vec{v}) = (mn)(\vec{u} \cdot \vec{v})$, $(m\vec{u}) \times (n\vec{v}) = (mn)(\vec{u} \times \vec{v})$

(3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

(4) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$

(5) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ แต่ $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

(6) $|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 \pm 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$

(7) การตีความหมายเชิงเรขาคณิตของเวกเตอร์

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- \vec{u} และ \vec{v} มีมุมระหว่างเวกเตอร์เป็นมุมแหลม ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$

- \vec{u} และ \vec{v} มีมุมระหว่างเวกเตอร์เป็นมุมป้าน ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

- $\vec{u} \parallel \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm|\vec{u}||\vec{v}|$

- \vec{u} , \vec{v} และ $\vec{v} \times \vec{w}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$

(8) พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี \vec{u} และ \vec{v} เป็นด้านประชิด เท่ากับ $|\vec{u} \times \vec{v}|$

(9) ปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี \vec{u} , \vec{v} และ \vec{w} เป็นด้านประกอบ เท่ากับ $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$



11. จำนวนเชิงซ้อน

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน

(1) ค่า i^n : $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$

(2) กำหนดให้ $z = a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง
ส่วนจริงของ z $\text{Re}(z) = a$ ส่วนจินตภาพของ z $\text{Im}(z) = b$

(3) สัมภาคของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$: $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

(4) ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

(5) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว (Polar form) $z = a + bi$: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

เมื่อ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

และ $\tan \theta = \frac{b}{a}$ (θ อยู่ในควอดรันต์ใดขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของ a, b)

(6) กราฟของจำนวนเชิงซ้อน

■ ระบบพิกัดฉาก จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ แทนด้วยจุด (a, b)

■ ระบบพิกัดเชิงขั้ว จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ แทนด้วยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

2. การดำเนินการบนจำนวนเชิงซ้อน

(1) การเท่ากัน : $a + bi = x + yi$ ก็ต่อเมื่อ $a = x$ และ $b = y$

(2) การบวกและลบ : $(a + bi) \pm (x + yi) = (a \pm x) + (b \pm y)i$

(3) การคูณด้วย k : $k(a + bi) = (ka) + (kb)i$

(4) การคูณ : $(a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$

(5) การหาร : $\frac{a + bi}{x + yi} = \frac{(a + bi)(x - yi)}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{(a + bi)(x - yi)}{x^2 + y^2}$

(6) การคูณและการหารในระบบพิกัดเชิงขั้ว



กำหนดให้ $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

จะได้ $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$(z_1)^n = r_1^n (\cos n\theta_1 + i \sin n\theta_1)$ (กฎของเดอมัวร์)

$$\bar{z}_1 = r_1 (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1))$$

3. สมบัติที่ควรรู้

(1) สมบัติของสังยุค $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

(2) สมบัติของค่าสัมบูรณ์ $|\bar{z}| = |z| = |-z|$, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(3) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(4) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

ข้อควรระวัง ♦ $|z|^2 \neq z^2$ และ $|z_1 \pm z_2|^2 \neq |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2z_1 z_2$ (ไม่เหมือนเวกเตอร์)

♦ ที่ถูกต้องคือ $|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2)$

4. การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$

(1) ถ้า z เป็นจำนวนจริง \Rightarrow ใช้การแยกตัวประกอบ

(2) ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน จาก $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

ใช้สูตรหารากที่ n ของ z ดังนี้

$$z_k = r^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right) \text{ เมื่อ } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

5. สมการพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

(1) สมการพหุนามจะมีคำตอบ(ราก)ทั้งหมด n คำตอบ

(2) ถ้า $a + bi$ เป็นคำตอบ(ราก) จะได้ว่า $a - bi$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

(3) ผลบวกของคำตอบ $= -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ และ ผลคูณคำตอบ $= \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$

(4) การสร้างสมการพหุนามจากคำตอบ ถ้า $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ เป็นคำตอบทั้งหมดของ $P(x) = 0$

จะได้ $P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) \dots (x - z_n)$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง



12. ลำดับและอนุกรม

1. ลำดับและอนุกรมเลขคณิตจำกัด เป็นลำดับที่มีสมบัติ $a_{n+1} - a_n = d$ (ผลต่างคงที่)

■ พจน์ทั่วไป $a_n = a_k + (n - k)d$

■ ผลบวก n พจน์แรก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

2. ลำดับและอนุกรมเลขเรขาคณิตจำกัด เป็นลำดับที่มีสมบัติ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ (อัตราส่วนคงที่)

■ พจน์ทั่วไป $a_n = a_k r^{n-k}$

■ ผลบวก n พจน์แรก $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$

3. สมบัติของ \sum

(1) $\sum_{i=1}^n k = nk$

(2) $\sum_{i=1}^n k(a_i \pm b_i) = k \left(\sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i \right)$

(3) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

(4) $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(5) $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

4. ลิมิตของลำดับ

(1) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาได้ เรียก a_n ว่าเป็นลำดับลู่เข้า (Convergence)

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาไม่ได้ เรียก a_n ว่าเป็นลำดับลู่ออก (Divergence)

(2) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{a_n} = 0$

(3) ถ้า $|a| < 1$ จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$



(4) ลิมิตของลำดับเศษส่วนพหุนาม

- ถ้าเศษและส่วนดีกรีเท่ากัน จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\text{ส.ป.ส.ของพจน์ดีกรีสูงสุดของเศษ}}{\text{ส.ป.ส.ของพจน์ดีกรีสูงสุดของส่วน}}$
- ถ้าดีกรีเศษน้อยกว่าดีกรีส่วน จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- ถ้าดีกรีเศษมากกว่าดีกรีส่วน ($k > p$) จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาไม่ได้ (∞ หรือ $-\infty$)

(5) ถ้า a_n เป็นลำดับเศษส่วนของฟังก์ชัน expo

- ถ้าฐานสูงสุดของเศษและส่วนเท่ากัน จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\text{ส.ป.ส.ของฐานสูงสุดของเศษ}}{\text{ส.ป.ส.ของฐานสูงสุดของส่วน}}$
- ถ้าฐานสูงสุดของเศษน้อยกว่าของส่วน จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- ถ้าฐานสูงสุดของเศษมากกว่าของส่วน จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาไม่ได้ (∞ หรือ $-\infty$)

5. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(1) ขั้นตอนการหาอนุกรมอนันต์ดังนี้

ขั้นที่ 1 หา $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$: ♦ ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ แล้วอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่ออก** (หาผลบวกอนันต์ไม่ได้)
♦ ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ดำเนินการต่อในขั้นที่ 2

ขั้นที่ 2 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$

ขั้นที่ 3 หา $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$: ♦ ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาไม่ได้ แล้วอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่ออก**

♦ ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ แล้วอนุกรมอนันต์ **ลู่เข้า** และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

(2) อนุกรมอนันต์เรขาคณิตอนันต์

- ถ้า $|r| < 1$ แล้วอนุกรมลู่เข้า และผลบวกอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ $s = \frac{a_1}{1-r}$
- ถ้า $|r| \geq 1$ แล้วอนุกรมลู่ออก

(3) อนุกรมอนันต์ที่ใช้แนวคิด **Telescoping** : เน้นแนวคิดแยกเศษส่วนย่อย 2 จำนวนลบกัน

(4) อนุกรมผลสมระหว่างเรขาคณิตคูณกับเลขคณิต :

กำหนดอนุกรม $a_1 + a_2r + a_3r^2 + a_4r^3 + \dots$ เมื่อ a_n เป็นลำดับเลขคณิต และ $|r| < 1$
ให้ $S = a_1 + a_2r + a_3r^2 + a_4r^3 + \dots \quad \dots(1)$



$$\begin{aligned} \text{นำ } r \text{ คูณ (1) ;} & \quad rS = a_1r + a_2r^2 + a_3r^3 + a_4r^4 + \dots \quad \dots(2) \\ \text{นำ(1) - (2) ;} & \quad (1-r)S = a_1 + dr + dr^2 + dr^3 + dr^4 + \dots \\ \text{จะได้} & \quad S = \frac{1}{1-r} \left(a_1 + \frac{dr}{1-r} \right) \end{aligned}$$

6. ดอกเบี้ย

ดอกเบี้ยเชิงเดียว

การคิดดอกเบี้ยเชิงเดียว เป็นการคิดดอกเบี้ยเพียงครั้งเดียวหลังจากครบกำหนดเวลาการกู้ยืมหรือการฝาก ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสูตร ดังนี้

กำหนดให้ P คือเงินต้น

n คือระยะเวลาในการกู้ยืมหรือการฝาก (หน่วยเป็นปี)

i คืออัตราดอกเบี้ยต่อปี

r คือ อัตราดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาทในระยะเวลา 1 ปี

ดังนั้น เงินรวมทั้งหมดเท่ากับ $S = P + Prn = P(1 + rn)$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

ดอกเบี้ยทบต้น

การคิดดอกเบี้ยทบต้น

ลักษณะของการคิดดอกเบี้ยวิธีนี้คือ ระยะเวลาจะถูกแบ่งเป็นปีและเมื่อถึงกำหนดการคิดดอกเบี้ย ก็จะมีการคิดดอกเบี้ยของปีนั้นและนำดอกเบี้ยที่ได้มารวมเป็นเงินต้นของปีถัดไป ทำให้เงินต้นมีจำนวนมากขึ้นเรื่อยๆ

เราจะได้ว่าเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $S_n = P(1 + r)^n$ บาท

7. มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

ถ้าลงทุน P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง เป็นเวลา n ปี

กำหนดให้ $r = \frac{i}{100}$ แล้วเมื่อครบ n ปี เงินรวมที่ได้ คือ $S = P \left(1 + \frac{r}{k} \right)^{nk}$

เรียก S ว่าเป็นมูลค่าอนาคตของเงินต้น P

ในทางกลับกัน จะเรียก P ว่าเป็นมูลค่าปัจจุบันของเงินรวม S

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบัน P ของเงินรวม S คือ $P = S \left(1 + \frac{r}{k} \right)^{-nk}$

8. ค่างวด

การหาเงินรวมของค่างวด

ถ้าการรับหรือจ่ายแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท รวมทั้งหมด n งวด

และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$ เมื่อ $r = \frac{i}{100}$



- ❖ ถ้ารับหรือจ่ายค่างวดตอนต้นงวด จะได้เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\frac{R(1+r)((1+r)^n - 1)}{r}$
- ❖ ถ้ารับหรือจ่ายค่างวดตอนสิ้นงวด จะได้เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\frac{R((1+r)^n - 1)}{r}$

❖ การหาค่างวด

ถ้ามูลค่าปัจจุบัน P บาท แบ่งรับหรือจ่ายแบบรายงวดงวดละ R บาท รวมทั้งหมด n งวด

และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$ เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

จะได้ค่ารายงวดคำนวณจาก $R = \frac{Pr}{1 - (1+r)^{-n}}$

13. แคลคูลัสเบื้องต้น

1. ลิมิตและความต่อเนื่อง

(1) ลิมิตของฟังก์ชัน $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ให้ลองแทน x ด้วย a เพื่อหาค่า $f(a)$

⇒ ถ้า $f(a)$ อยู่ในรูป $\frac{k}{0}$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาไม่ได้

ถ้า $f(a)$ อยู่ในรูป $\frac{k}{\infty}$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

ถ้า $f(a)$ อยู่ในรูป k จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$

⇒ ถ้า $f(a)$ อยู่ในรูป $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ (ห้ามตอบทันที) ให้จัดรูปโดยใช้วิธีการดังต่อไปนี้

- แยกตัวประกอบ

- คูณสังยุค(conjugate)

- ใช้กฎโลปีตาล $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(2) ลิมิตทางเดียว

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ แทนลิมิตทางซ้ายของ a (ดู $f(x)$ ใกล้เคียงกับอะไร เมื่อ $x < a$ แต่ใกล้ๆกับ a)

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ แทนลิมิตทางขวาของ a (ดู $f(x)$ ใกล้เคียงกับอะไร เมื่อ $x > a$ แต่ใกล้ๆกับ a)

หมายเหตุ ● โดยวิธีการหาจะใช้วิธีเดียวกับหัวข้อ (1)

- ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาได้ก็ต่อเมื่อ $L_1 = L_2$



(3) ความต่อเนื่องฟังก์ชัน

f ต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ (1) $f(a)$ หาได้

(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาได้

และ (3) $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

(1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f จาก x_1 ถึง x_2 เท่ากับ $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

(2) อัตราการเปลี่ยนแปลงหรืออนุพันธ์ของ f ที่ x ใดๆ เท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (อนุพันธ์อันดับหนึ่ง)

และ $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ (อนุพันธ์อันดับสอง)

หมายเหตุ นิยามอีกแบบของ $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

(3) สูตรของอนุพันธ์

■ ถ้า $f(x) = a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว จะได้ $f'(x) = 0$

■ ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง จะได้ $f'(x) = nx^{n-1}$

■ ถ้า $f(x) = cg(x)$ จะได้ $f'(x) = cg'(x)$

■ ถ้า $f(x) = g(x) \pm h(x)$ จะได้ $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

■ ถ้า $f(x) = g(x)h(x)$ จะได้ $f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$

■ ถ้า $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ จะได้ $f'(x) = \frac{h(x)g'(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$

■ ถ้า $f(x) = (g(x))^n$ จะได้ $f'(x) = n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$

■ ถ้า $f(x) = (g \circ h)(x)$ จะได้ $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$



(4) ความชันของเส้นโค้ง และสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

กำหนดเส้นโค้ง $y = f(x)$ จะได้ ความชันเส้นโค้งที่จุด $(a, f(a))$ เท่ากับ $f'(a)$

และสมการเส้นสัมผัสที่จุด $(a, f(a))$ คือ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

หรือหาความชัน และจุดที่ผ่าน หลังจากนั้นใช้สมการหา สมการเส้นตรงแบบปกติ

(5) ค่าสูงสุดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ดำเนินการหาดังนี้

ขั้นที่ 1 หาค่าวิกฤต ซึ่งหาจาก ค่า c ที่ทำให้ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

ขั้นที่ 2 นำค่าวิกฤต c ที่ได้จากขั้นที่ 1 ไปตรวจสอบว่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยนำค่าวิกฤตทั้งหมดเขียนบนเส้นจำนวนเรียงจากน้อยไปมากแล้วหาค่า $f'(x)$ ในแต่ละช่วง

◆ ถ้าค่าของ $f'(x)$ เมื่อ x ใกล้ๆกับ c เปลี่ยนจาก**บวก**ไปเป็น**ลบ**

จุด $(c, f(c))$ ดังกล่าวเป็น**จุดสูงสุดสัมพัทธ์**

◆ ถ้าค่าของ $f'(x)$ เมื่อ x ใกล้ๆกับ c เปลี่ยนจาก**ลบ**ไปเป็น**บวก**

จุด $(c, f(c))$ ดังกล่าวเป็น**จุดต่ำสุดสัมพัทธ์**

(6) ค่าสูงสุดค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือค่าฟังก์ชันที่มากที่สุดในช่วงปิด โดยเปรียบเทียบค่ามากที่สุดระหว่างค่าสูงสุดสัมพัทธ์ในช่วง ค่าฟังก์ชันเมื่อ x น้อยสุดในช่วง และ ค่าฟังก์ชันเมื่อ x มากสุดในช่วง

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือค่าฟังก์ชันที่น้อยที่สุดในช่วงปิด โดยเปรียบเทียบค่าน้อยที่สุดระหว่างค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ในช่วง ค่าฟังก์ชันเมื่อ x น้อยสุดในช่วง และ ค่าฟังก์ชันเมื่อ x มากสุดในช่วง

3. อินทิกรัลของฟังก์ชัน

(1) สูตรการอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

$$\blacksquare \int k \, dx = kx + C$$

$$\blacksquare \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\blacksquare \int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$$

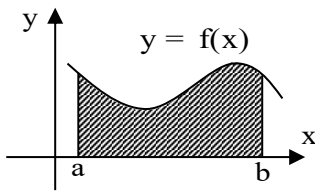
$$\blacksquare \int f(x) \pm g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

$$\blacksquare \int (f(x))^n f'(x) \, dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$$

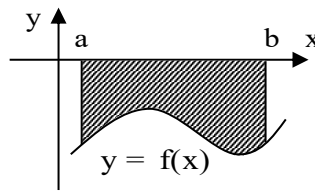
(2) อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$ เมื่อ $F'(x) = f(x)$



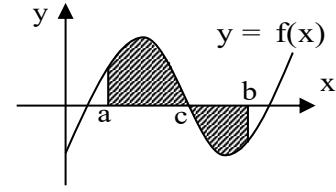
(3) พื้นที่ปิดล้อม



$$\text{พื้นที่} = \int_a^b f(x) dx$$



$$\text{พื้นที่} = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$



$$\text{พื้นที่} = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

14. ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

1. การหาค่าแฟคทอเรียล (Factorial)

กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ และ $0! = 1$

2. กฎการนับเบื้องต้น

ถ้าต้องการทำงาน k ชนิด(ขั้นตอน)ต่อเนื่อง(หรือเกิดพร้อมกัน) โดยที่
มีวิธีทำงานชนิดที่ 1 n_1 วิธี

ในแต่ละวิธีของการทำงานชนิดที่ 1 มีวิธีของการทำงานชนิดที่ 2 n_2 วิธี

ในแต่ละวิธีของการทำงานชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2 มีวิธีของการทำงานชนิดที่ 3 n_3 วิธี

⋮

⋮

ในแต่ละวิธีของการทำงานชนิดที่ 1 ถึงชนิด $k-1$ มีวิธีของการทำงานชนิดที่ k n_k วิธี

จะได้ จำนวนวิธีการทำงานทั้ง k ชนิดนี้เท่ากับ $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$ วิธี

3. วิธีเรียงสับเปลี่ยน หมายถึงการนำสิ่งของที่มีอยู่ทั้งหมดหรือบางส่วนมาจัดเรียงลำดับสับไปมา โดยคำนึงถึงลำดับหรือตำแหน่งสิ่งของเป็นสำคัญ วิธีการเรียงสับเปลี่ยนแบ่งเป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

(1) วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น สูตรที่ควรรู้ได้แก่

■ ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น เท่ากับ $n!$ วิธี

■ ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น r สิ่ง ($r \leq n$)

$$\text{เท่ากับ } {}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ วิธี}$$

■ ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ที่แตกต่างกันไม่ทั้งหมด โดยที่ในกลุ่มที่ 1, 2, ..., k มีสิ่งของซ้ำกัน เป็น n_1, n_2, \dots, n_k สิ่ง ตามลำดับและ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$



จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้ง n สิ่งเท่ากับ $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ วิธี

(2) วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม สูตรที่ควรรู้ได้แก่

- ถ้าสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่งจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมเท่ากับ $(n - 1)!$ วิธี

หมายเหตุ : แนวคิดการจัดเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมอีกแนวทางหนึ่ง คือ ให้กำหนดตำแหน่งสิ่งของสิ่งหนึ่งสิ่งใดไปแล้ว ให้จัดที่เหลือแบบเชิงเส้น

(3) เทคนิคการเรียงสับเปลี่ยน “ให้อยู่ติดกัน” และ “ไม่มีสิ่งใดติดกัน”

- การจัดเรียงให้สิ่งของบางสิ่งอยู่ให้ติดกันเสมอ ให้มัดรวมสิ่งที่ต้องการให้อยู่ติดกันเป็นสิ่งของหนึ่งสิ่งแล้วเรียงสับเปลี่ยนในกลุ่มด้วย (ใช้เทคนิคมัดมองรวมเป็นหนึ่ง)

- การจัดเรียงที่ให้สิ่งของบางสิ่งไม่ให้ติดกันเลย ให้จัดเรียงสิ่งของอื่นก่อนแล้วนำสิ่งของที่เหลือไปแทรกระหว่างสิ่งที่จัดไว้แล้ว (จัดอย่างอื่นก่อนแล้วแทรกสิ่งที่ไม่ต้องการให้ติดกัน)

4. วิธีจัดหมู่ (Combination)

การนำสิ่งของที่มีความแตกต่างกันทั้งหมดหรือเพียงบางส่วนมาจัดหมู่ โดยไม่ถือตำแหน่งหรือลำดับก่อนหลังเป็นสำคัญ เช่น การเลือกหยิบของพร้อมกันจากจำนวนที่มีอยู่ การสร้างสับเซต

สูตรที่ควรรู้

ถ้ามีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด หยิบหรือเลือกออกมา r สิ่งรวมเป็นหมู่ (หยิบพร้อมกัน)

จำนวนวิธีที่ได้ทั้งหมดเท่ากับ $C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

5. ทฤษฎีบททวินาม

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

มีพจน์ทั่วที่ $r + 1$ เท่ากับ $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

6. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ (Probability of Events)

ถ้า S เป็นปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นเซตจำกัด และประกอบด้วยผลลัพธ์ที่มีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน

และ E เป็นเหตุการณ์ของ S จะได้ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

คุณสมบัติบางประการเกี่ยวกับความน่าจะเป็น

1. ถ้า E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว $0 \leq P(E) \leq 1$
2. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในปริภูมิตัวอย่าง S จะได้



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

3. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน จะได้ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

15. สถิติ

1. การแจกแจงความถี่ข้อมูล

(1) ตารางแจกแจงความถี่

■ **ขอบล่าง(L)** ของอันตรภาคชั้น คือค่ากึ่งกลางระหว่างค่าน้อยที่สุดในอันตรภาคชั้นนั้นกับค่าที่มากที่สุดของอันตรภาคชั้นที่ติดกันและต่ำกว่า

■ **ขอบบน(U)** ของอันตรภาคชั้น คือค่ากึ่งกลางระหว่างค่าที่มากที่สุดในอันตรภาคชั้นกับค่าที่น้อยที่สุดของอันตรภาคชั้นที่ติดกันและสูงกว่า

■ **ความถี่สะสม(F)** คือ ผลรวมของความถี่ของค่านั้นหรืออันตรภาคชั้นนั้นกับความถี่ของค่าหรืออันตรภาคชั้นที่มีช่วงคะแนนต่ำกว่าทั้งหมด

■ **ความกว้างของอันตรภาคชั้น(I)** = ขอบบน - ขอบล่าง

■ **จุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้น(x_i)** = $\frac{\text{ขอบล่าง} + \text{ขอบบน}}{2} = \frac{\text{ค่ามากที่สุด} + \text{ค่าน้อยสุด}}{2}$

■ **ความถี่สัมพัทธ์** = $\frac{\text{ความถี่}}{\text{จำนวนข้อมูลทั้งหมด}}$

(2) แผนภาพต้นไม้(stem-and-leaf plot)

เช่น

0	2
1	3 1 4
2	1 5

 อ่านเป็นข้อมูลได้แก่ 2, 13, 11, 14, 21, 25

2. การวัดค่ากลางของข้อมูล (measures of central value)

(1) **ค่าเฉลี่ยเลขคณิต** ค่าเฉลี่ยเลขคณิตกลุ่มประชากร แทนด้วย μ และกลุ่มตัวอย่าง แทนด้วย \bar{x}

■ ข้อมูลแจกแจงไม่เป็นอันตรภาคชั้น $\mu = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$

■ ข้อมูลแจกแจงความถี่เป็นอันตรภาคชั้น $\mu = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{N}$, $N = \sum_{i=1}^k f_i$

เมื่อ x_i แทนจุดกึ่งกลางชั้น และ f_i แทนความถี่ในอันตรภาคชั้นที่ i



- ข้อมูลแจกแจงความถี่เป็นอันตรภาคชั้น $\mu = \bar{x} = a + \bar{d}I$, $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i d_i}{N}$, $N = \sum_{i=1}^k f_i$

เมื่อ $d_i = \frac{\text{จุดกึ่งกลางชั้น} - a}{I}$ เมื่อ a เป็นจุดกึ่งกลางชั้นใดชั้นหนึ่ง

- ค่าเฉลี่ยเลขคณิตถ่วงน้ำหนัก $\mu = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$ เมื่อ w_i แทนน้ำหนักของค่า x_i

- ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม $m = \bar{x}_{\text{รวม}} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$

เมื่อ \bar{x}_i แทนค่าเฉลี่ยเลขคณิต และ n_i แทนจำนวนค่าของข้อมูลชุดที่ i

(2) มัธยฐาน(median)

- ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น

ให้เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก แล้วหาตำแหน่งมัธยฐาน $= \frac{n+1}{2}$

- ◆ ถ้าตำแหน่งเป็นจำนวนเต็ม จะได้ข้อมูลในตำแหน่งที่หาได้เป็นมัธยฐาน
- ◆ ถ้าตำแหน่งไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้นำค่าที่อยู่ระหว่างตำแหน่งนั้นมาบวกกันแล้วหารด้วย 2

- ข้อมูลที่แจกแจงความถี่เป็นอันตรภาคชั้น

หาตำแหน่งมัธยฐาน $= \frac{n}{2}$ นำไปเทียบกับความถี่สะสมเพื่อดูว่าจะอยู่ในอันตรภาคชั้นใด

$$\text{จะได้ มัธยฐาน(Med)} = L + \left(\frac{\frac{n}{2} - \sum f_L}{f_M} \right) I$$

เมื่อ $\sum f_L$ คือผลรวมความถี่ของทุกอันตรภาคชั้นที่คะแนนต่ำกว่า

f_M คือความถี่ของอันตรภาคชั้นที่มีมัธยฐาน

(3) ฐานนิยม(mode)

- ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น

ฐานนิยม คือ ค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด(ข้อมูลอาจจะไม่มีฐานนิยมหรือมีสองค่าได้)

- ข้อมูลที่แจกแจงความถี่เป็นอันตรภาคชั้น

ฐานนิยม คือ จุดกึ่งกลางอันตรภาคชั้นที่มีความถี่สูงสุด



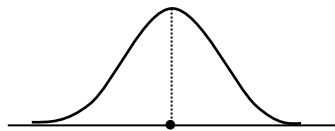
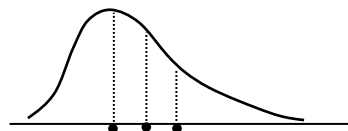
(4) สมบัติของค่ากลางที่ควรรู้

- $\sum(x_i - \bar{x}) = 0, \sum(x_i - \mu) = 0$
- $\sum(x_i - A)^2$ มีค่าน้อยสุด เมื่อ $A = \bar{x}$ (หรือ $A = \mu$)
- $\sum|x_i - A|$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $A = \text{Med}$
- ความสัมพันธ์ระหว่างค่ากลางและการแจกแจงความถี่ของข้อมูล

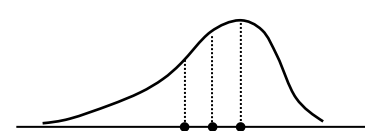
เส้นโค้งปกติ

เส้นโค้งเบ้ขวา

เส้นโค้งเบ้ซ้าย

Mod = Med = \bar{x} 

$$\text{Mod} < \text{Med} < \bar{x}$$

$$|\text{Mod} - \bar{x}| \approx 3 |\text{Med} - \bar{x}|$$


$$\bar{x} < \text{Med} < \text{Mod}$$
 (Pearson's Coefficient of Skewness)

3. การวัดตำแหน่งที่ของข้อมูล

กำหนดข้อมูลชุดหนึ่งมี N จำนวนควอร์ไทล์ที่ k (Q_k) เป็นค่าที่มีจำนวนในข้อมูลซึ่งไม่เกินค่านี้อยู่ประมาณ $\frac{kN}{4}$ เดซิลที่ k (D_k) เป็นค่าที่มีจำนวนค่าในข้อมูลซึ่งไม่เกินค่านี้อยู่ประมาณ $\frac{kN}{10}$ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ k (P_k) เป็นค่าที่มีจำนวนค่าในข้อมูลซึ่งไม่เกินค่านี้อยู่ประมาณ $\frac{kN}{100}$

- การหาค่าควอไทล์ เดซิล และเปอร์เซ็นต์ไทล์ของข้อมูลที่ไม่แจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น

- (1) นำข้อมูลมาเรียงจากน้อยไปมาก
- (2) หาดำแหน่งค่าของค่าที่ต้องการหา

ค่า	Q_k	D_k	P_k
ตำแหน่ง	$\frac{k(N+1)}{4}$	$\frac{k(N+1)}{10}$	$\frac{k(N+1)}{100}$

- (3) หาค่าที่อยู่ในตำแหน่งนั้น

ถ้าตำแหน่งเป็นจำนวนเต็มจะได้ว่าข้อมูลที่อยู่ในตำแหน่งนั้นเป็นค่าที่ต้องการ

ถ้าตำแหน่งไม่เป็นจำนวนเต็มใช้การเทียบบัญญัติไตรยางศ์ ระหว่างตำแหน่งกับค่าของข้อมูล เพื่อหาค่าตามที่ต้องการ



■ การหาค่าควอไทล์ เดซิซ์ และเปอร์เซ็นไทล์ของข้อมูลที่แจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น

- (1) สร้างความถี่สะสม
- (2) หาดำแหน่งค่าของค่าที่ต้องการหา

ค่า	Q_k	D_k	P_k
ตำแหน่ง	$\frac{kN}{4}$	$\frac{kN}{10}$	$\frac{kN}{100}$

- (3) นำตำแหน่งไปเทียบกับความถี่สะสมเพื่ออันตรภาคชั้นที่จะมีค่าการวัดตำแหน่งที่ต้องการ
- (4) ใช้สูตรในการหาค่าดังนี้

$$\text{จะได้ } Q_k, D_k, P_k = L + \left(\frac{\text{ตำแหน่งจากข้อ (2)} - \sum f_L}{f} \right) I$$

เมื่อ $\sum f_L$ คือผลรวมความถี่ของทุกอันตรภาคชั้นที่คะแนนต่ำกว่า
 f คือความถี่ของอันตรภาคชั้นที่มี Q_k, D_k, P_k

4. การวัดการกระจายของข้อมูล

(1) การวัดการกระจายสัมบูรณ์ (measures of absolute variation)

■ พิสัย (Range)

ข้อมูลแจกแจงไม่เป็นอันตรภาคชั้น พิสัย (R) = $x_{\max} - x_{\min}$

ข้อมูลแจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น พิสัย (R) = $U_{\max} - L_{\min}$

■ ส่วนเบี่ยงเบนควอไรท์ (Quartile Deviation : Q.D.) = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

■ ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (Mean Deviation : M.D.)

ข้อมูลแจกแจงไม่เป็นอันตรภาคชั้น M.D. = $\frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x_i - \mu|}{N}$

ข้อมูลแจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น M.D. = $\frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i |x_i - \mu|}{\sum f_i}$

■ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation)

ข้อมูลประชากรที่แจกแจงไม่เป็นอันตรภาคชั้น $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \mu^2}$



$$\text{ข้อมูลตัวอย่างที่แจกแจงไม่เป็นอันตรภาคชั้น} \quad s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$$

$$\text{ข้อมูลประชากรที่แจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i^2)}{N} - \mu^2}$$

$$\text{ข้อมูลตัวอย่างที่แจกแจงเป็นอันตรภาคชั้น} \quad s = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i^2) - n\bar{x}^2}{n-1}}$$

■ ความแปรปรวน(variance) $v = s^2$ หรือ $v = \sigma^2$

(2) การวัดการกระจายสัมพัทธ์ (measures of relative variation)

$$\text{สัมประสิทธิ์ของพิสัย} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\max} + x_{\min}}$$

$$\text{สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$\text{สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย} = \frac{\text{M.D.}}{\bar{x}} = \frac{\text{M.D.}}{\mu}$$

$$\text{สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน} = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\mu}$$

(3) สมบัติการวัดการกระจายสมบูรณ์ที่ควรทราบ

1. การวัดการกระจายสัมบูรณ์ทุกชนิดมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
2. การวัดการกระจายสัมบูรณ์เท่ากับศูนย์ ก็ต่อเมื่อ ทุกค่าของข้อมูลเท่ากัน
3. ถ้าข้อมูลชุดที่ 1 คือ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ และ ข้อมูลชุดที่ 2 คือ $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$

มีความสัมพันธ์ $y_i = ax_i + b$ จะได้ว่า

- $\bar{y} = a\bar{x} + b$ (การวัดค่ากลางอื่นก็มีสมบัติเหมือนกันกับ \bar{x})
- $s_y = |a|s_x$, $v_y = a^2v_x$ (การวัดการกระจายอื่นก็มีสมบัติเหมือนกันกับ s)

4. ความแปรปรวนรวม

$$\bullet s_{\text{รวม}}^2 = \frac{n_1s_1^2 + n_2s_2^2}{n_1 + n_2} \quad \text{เมื่อ } \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

$$\bullet s_{\text{รวม}}^2 = \frac{n_1s_1^2 + n_2s_2^2 + n_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{n_1 + \dots + n_k} \quad \text{เมื่อ } \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$$



5. การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่ม (Random Variable) ตัวแปรที่กำหนดค่าให้กับผลการทดลองที่เกิดขึ้นโดยที่ค่าเหล่านั้น อาจจะเป็นค่าจริง หรือฟังก์ชันที่มีค่าจริงก็ได้ ในทางสถิติมักใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในการทดลองสุ่มหนึ่ง ๆ ถ้ารวมทุกๆ เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้ในการทดลองสุ่มเข้าเป็นเซตแล้ว จะเรียกเซตนั้นว่าเป็น ปริภูมิตัวอย่าง (Sample Space) ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ S ตัวอย่างของตัวแปรสุ่ม เช่น

ตัวแปรสุ่มแบ่งออกเป็น 2 ชนิดดังนี้

ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable)

ตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มเป็นสับเซตของจำนวนนับ หรืออาจกล่าวได้ว่าทุกๆ ค่าของ X ถูกกำหนดได้ด้วยจำนวนนับใดๆ

ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง (Continuous Random Variable)

ตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มเป็นสับเซตของจำนวนจริง หรืออาจจะมีค่าเป็นจำนวนใดๆก็ได้ในช่วงที่ต่อเนื่องกัน ซึ่งไม่สามารถนับได้ว่ามี X จำนวนเท่าใดในช่วงนั้นๆ

ค่าคาดหวังหรือค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม (Expected Value หรือ Expectation)

(1) ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

$$E(X) = \mu_X = \sum_{\text{all } x} xf(x)$$

(2) ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

$$E(X) = \mu_X = \int_{\text{all } x} xf(x) dx$$

ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม (Variance Value of Random Variable)

(1) ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง หาได้ดังนี้

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = E(X - \mu_X)^2 = \sum_{\text{all } x} (x - \mu_X)^2 f(x) = \sum_{\text{all } x} x^2 f(x) - \mu_X^2$$

(2) ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง หาได้ดังนี้

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = E(X - \mu_X)^2 = \int_{\text{all } x} (x - \mu_X)^2 f(x) dx = \int_{\text{all } x} x^2 f(x) dx - \mu_X^2$$

5.1 การแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง (Discrete Uniform Distribution)

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นไปได้ k ค่า คือ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$

โดยแต่ละค่าของตัวแปรสุ่มมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่ากันจะเรียกตัวแปรสุ่มนี้ว่า

"ตัวแปรสุ่มเอกรูปไม่ต่อเนื่อง" และเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มนี้ว่า "การแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง"

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง



$$f(x; k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & ; \quad x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_k \\ 0 & ; \quad \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $X \sim \text{Uni}(k)$ หรือ $X \sim U(k)$

เรียก k ว่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง

ค่าคาดหวังของการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง $E(X) = \mu_X = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$

ความแปรปรวนของการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง $\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \mu_X)^2$

5.2 การแจกแจงทวินาม

การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution) คือการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งคือจำนวนครั้งของการเกิดผลสำเร็จจากการทดลองสุ่ม n ครั้ง ที่เป็นอิสระกัน โดยในแต่ละครั้งมีโอกาสเกิดผลสำเร็จด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ p และไม่เกิดผลสำเร็จด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $1 - p$

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ที่มีการแจกแจงทวินาม

โดยที่ n แทนจำนวนครั้งของการทดลองสุ่ม

และ p แทนความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลสำเร็จในการทดลองสุ่มแต่ละครั้ง จะได้ว่า

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม

$$f(x; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & ; \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & ; \quad \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ค่าคาดหวังของการแจกแจงทวินาม $E(X) = \mu_X = np$

ความแปรปรวนของการแจกแจงทวินาม $\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = np(1-p)$

5.3 การแจกแจงปกติ

กำหนดให้ X แทนตัวแปรสุ่มปกติ (normal random variable)

จะเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ว่า การแจกแจงปกติ (normal distribution)

ซึ่งมี



ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} & ; -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0 \\ 0 & ; \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

โดยที่ $e \approx 2.718$ และ $\pi \approx 3.1416$

ค่าคาดหวังของการแจกแจงปกติ เท่ากับ $E(X) = \mu_X = \mu$

ความแปรวนของการแจกแจงปกติ เท่ากับ $\text{Var}(X) = V(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2$

การแจกแจงปกติมาตรฐาน

ถ้า Z เป็นตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

แล้ว จะเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Z ว่า

การแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution)

ซึ่งมี ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติมาตรฐาน คือ

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} & ; -\infty < z < \infty \\ 0 & ; \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $Z \sim N(0, 1)$

ค่าคาดหวังของการแจกแจงปกติ เท่ากับ $E(Z) = \mu_Z = 0$

ความแปรวนของการแจกแจงปกติ เท่ากับ $\text{Var}(Z) = \sigma_Z^2 = \text{Var}(z) = 1$



การหาความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ

กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 หรือ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

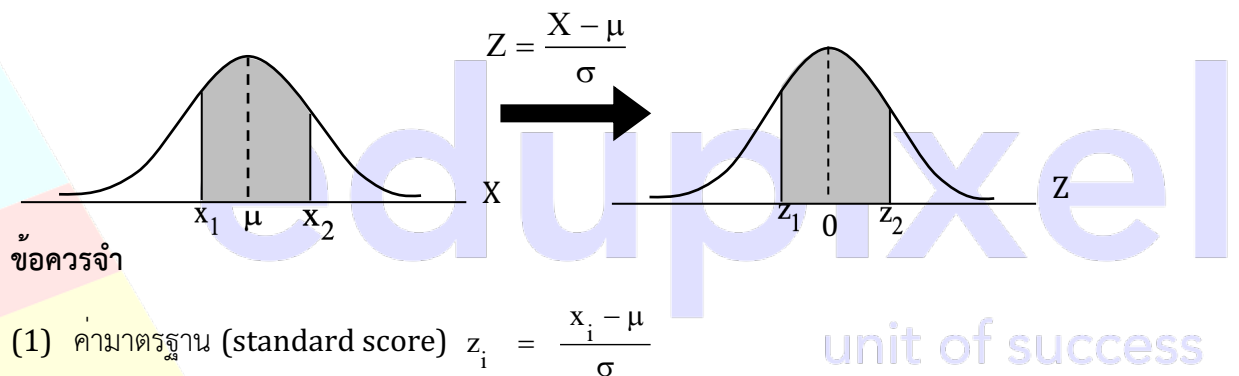
ถ้าต้องการหาความน่าจะเป็น $P(x_1 < X < x_2)$ ทำได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 เปลี่ยนค่าตัวแปรสุ่ม x_1 และ x_2 ให้เป็นค่าตัวแปรสุ่มมาตรฐาน z_1 และ z_2

$$\text{ตามลำดับ โดยใช้สมบัติ } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ขั้นที่ 2 หาค่า $P(z_1 < Z < z_2)$ จากตารางความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

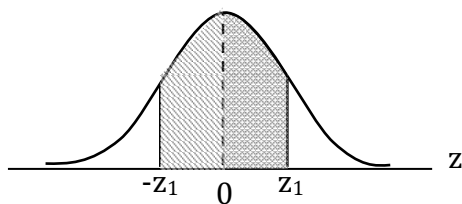
จะได้ $P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$ ดังแผนภาพ



(1) ค่ามาตรฐาน (standard score) $z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$

สมบัติของค่ามาตรฐาน $\blacksquare \sum_{i=1}^N z_i = 0$, $\blacksquare \sum_{i=1}^N z_i^2 = N$

(2) การแจกแจงปกติและเส้นโค้งปกติ

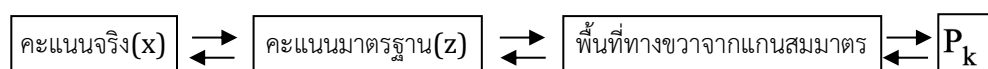


สมบัติของพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ

- ◆ พื้นที่มีค่าเท่ากับ 1 (หรือคิดเป็น 100%)
- ◆ แบ่งพื้นที่ออกเป็น 2 ส่วนๆละ 0.5 (หรือ 50%)
- ◆ พื้นที่สองฝั่งสมมาตรกัน

หมายเหตุ พื้นที่ที่กำหนดมาให้ในตาราง เป็นพื้นที่ทางขวาของแกนสมมาตรที่จาก 0 ถึง z

(3) ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์ไทล์กับพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน



โดยที่ $k = (\text{พื้นที่ทางซ้ายของค่ามาตรฐาน } z) \times 100$

หมายเหตุ ถ้าจะหา Q_k หรือ D_k สามารถทำได้ด้วยขั้นตอนเดียวกันกับ P_k



16. หลักการเพิ่มเติม

หลักการเพิ่มเติม แนวโจทย์เซต

แนวโจทย์ เซต	เทคนิคการคิด
ข้อสอบแผนภาพเวนน้อยเลออร์มีชาย-หญิง	วาดแผนภาพเวนนแบบแบ่งครึ่งบนล่าง
เปรียบเทียบ $A \in B$ (ซ้าย ขวา)	ตัดวงเล็บ { } ฝั่งขวาออกแล้วเทียบ
เปรียบเทียบ $A \subset B$ (ซ้าย ขวา)	ตัดวงเล็บ { } ทั้งสองฝั่งแล้วเทียบ
เปรียบเทียบ $A \subset P(B)$ (สับเซตของ powerset(B))	ตัดวงเล็บ { } ฝั่งขวาแล้วเปลี่ยน \subset เป็น \in แล้วคิดต่อแบบเทียบสมาชิกเหมือนเดิม
แนวให้ข้อมูล $n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$	ใช้สูตร $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
แนวให้ข้อมูล $n(A), n(B), n(C), n(A \cap B), n(A \cap C), n(B \cap C), n(A \cap B \cap C)$	ใช้สูตร $n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
แนวให้ข้อมูลเป็นคำพูดภาษาไทย เช่น มีนักเรียนกี่คน ชอบอะไรกี่คน ...	วาดแผนภาพเวนนน้อยเลออร์คิดเลย

หลักการเพิ่มเติมแนวโจทย์การเซ็ค ค่าต่าง ๆ รวมถึงฟังก์ชัน

แนวโจทย์ คำตอบ/ฟังก์ชัน	เทคนิคการคิด
สมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ มีคำตอบเดียว	$b^2 - 4c = 0$
สมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง	$b^2 - 4c < 0$
สมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ มี 2 คำตอบ	$b^2 - 4c > 0$
แนวสมการสองฝั่ง เช่น $5x^2 + 3x + 2 = Ax^2 + Bx + 2$	เทียบสัมประสิทธิ์สองฝั่งของสมการต้องเท่ากัน เช่น A=5, B=3 เป็นต้น
แนวหาหลักหน่วยของ 3^{xxxx} หรือตัวเลขอื่นยกกำลัง บลา ๆ ๆ	ให้หา pattern ของเลขหลักหน่วยที่ซ้ำ แล้วเอาเลขชี้กำลังไปหารเอาเศษด้วยจำนวนใน pattern นั้น ๆ
พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชัน	<ul style="list-style-type: none"> • ตัวหน้าห้ามซ้ำ (หากเป็นคู่อันดับ) • ลากเส้นแนวตั้งต้องตัดจุดเดียว (หากเป็นกราฟ)
พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชัน 1-1	<ul style="list-style-type: none"> • ตัวหน้าห้ามซ้ำ (หากเป็นคู่อันดับ) • ลากเส้นแนวนอนต้องตัดจุดเดียว (หากเป็นกราฟ)
หากปรากฏ $ y $ ในสมการจะไม่ใช่ $f(x)$	เนื่องจากหากวาดกราฟจะทำให้ลากเส้นแนวตั้ง
พาราโบลา (หงายคว่ำ)	เป็นฟังก์ชัน แต่ไม่เป็น 1-1
พาราโบลา (ตะแคงซ้าย ขวา)	ไม่เป็นฟังก์ชัน
สมการสัมผัสแกน X	ให้แทน $y=0$ (ค่า y เป็น 0)
สมการสัมผัสแกน Y	ให้แทน $x=0$ (ค่า x เป็น 0)



รวมสูตรพีชคณิต เพื่อการคิดที่เร็วขึ้น !

รวมสูตรพีชคณิต	
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	$a^4 + b^4 = (a + b)(a - b)[(a + b)^2 - 2ab]$
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	$a + ab + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$
$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
$(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$	$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$
$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$	$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$
$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$	$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$
$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	$a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	ถ้า $a + b + c = 0$ แล้ว $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$	$a^8 - b^8 = (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
$2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$	$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

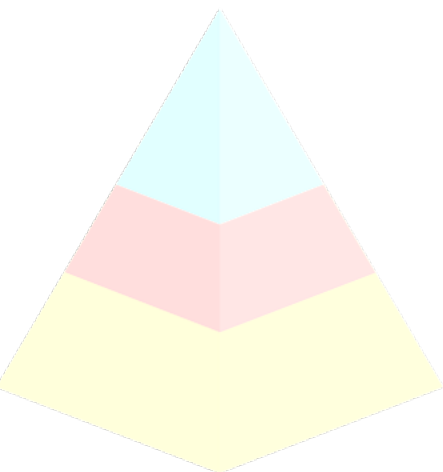
พื้นที่และปริมาตร	
SHAPE	สูตรการคำนวณ
พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส	ด้าน × ด้าน $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณเส้นทแยงมุม
ความยาวรอบรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	$4 \times$ ด้าน
พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า	กว้าง × ยาว
ความยาวรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	(กว้าง + ยาว) × 2
พื้นที่สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน, ด้านขนาน	ฐาน × สูง
พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู	$\frac{1}{2} \times$ ผลบวกด้านคู่ขนาน × สูง
พื้นที่สี่เหลี่ยมรูปร่าง	$\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม
พื้นที่สามเหลี่ยม (ใด ๆ)	$\frac{1}{2} \times$ ฐาน × สูง
พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า	$\frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (ด้าน) ²
พื้นที่วงกลม	πr^2
เส้นรอบรูปวงกลม	$2\pi r$
พีระมิด : พื้นที่ผิวข้าง	$\frac{1}{2} \times$ ความยาวเส้นรอบรูปฐาน × สูงเอียง
พีระมิด : พื้นที่ผิวทั้งหมด	พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง
พีระมิด : ปริมาตร	$\frac{1}{3} \times$ พื้นที่ฐาน × สูง
ทรงกรวย : พื้นที่ผิวข้าง	$\pi r l$, เมื่อ l คือสูงเอียง
ทรงกรวย : พื้นที่ผิวทั้งหมด	$\pi r^2 + \pi r l$
ทรงกรวย : ปริมาตร	$\frac{1}{3} \pi r^2 h$



ทรงกลม : พื้นที่ผิวทั้งหมด	$4\pi r^2$
ทรงกลม : ปริมาตร	$\frac{4}{3}\pi r^3$
ทรงกระบอก : พื้นที่ผิวข้าง	$2\pi rh$
ทรงกระบอก : พื้นที่ผิวทั้งหมด	$2\pi r^2 + \pi rh$
ทรงกระบอก : ปริมาตร	$\pi r^2 h$
ปริซึม : พื้นที่ผิวข้าง	ความยาวเส้นรอบรูปฐาน \times สูง
ปริซึม : พื้นที่ผิวทั้งหมด	$2 \times$ พื้นที่หน้าตัด $+ $ พื้นที่ผิวข้าง
ปริซึม : ปริมาตร	พื้นที่ฐาน \times สูง

รวมการจัดทำเอกสาร Special thanks

- GTRmath (ได้รับสิทธิในการนำเอกสารเข้าร่วมโครงการอย่างถูกต้อง)
- Edupixel เพิ่มเติม



edupixel
unit of success