

ข้อสอบสอวน.คณิตศาสตร์ ปี 2552

คลังข้อสอบโดย www.educationpixel.com

1. ข้อตกลง

1. ให้ Z, R แทนเซตจำนวนเต็มและเซตของจำนวนจริง ตามลำดับ
2. ให้ Z^+, R^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวกและเซตของจำนวนจริงบวก ตามลำดับ
3. ให้ $x \in R$ กำหนด $[x]$ แทนจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x เช่น $[2.5] = 2, [-2.5] = -3$ เป็นต้น
4. ให้ $N \in Z^+$ และ $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ เป็นการเขียนแทน N ในระบบฐาน 10 กำหนด $\text{Sum}(N) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ เช่น $\text{Sum}(1789) = 1 + 7 + 8 + 9 = 25$
5. ให้ X แทนเซตจำกัด กำหนด $|x|$ แทนจำนวนสมาชิกของ X
6. ให้ XYZ เป็นรูปสามเหลี่ยม กำหนด $[XYZ]$ แทนพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม XYZ

ตอนที่ 1 ชุดพีชคณิตจำนวน 10 ข้อ (ข้อ 1 ถึงข้อ 10)

1. จงหาค่าของ $\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ$

2. จงคำนวณหาพื้นที่ผิวของทรงลูกบาศก์ที่แนบในทรงกลมที่มีพื้นที่ π ตารางหน่วย

3. ให้ $X = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/10, a, b, ab \text{ เป็นลำดับเลขคณิต}\}$ และ $A = \{a \in \mathbb{R}/(a, b) \in X\}$ จงหาผลคูณของสมาชิกใน A

4. ให้ f เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย

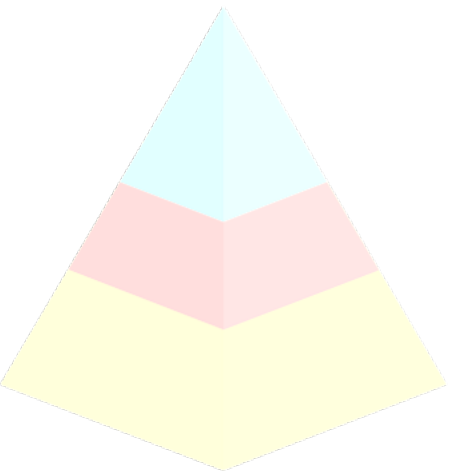
$$f(x) = \frac{x^5}{5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1} \text{ ถ้า } x_i = \frac{i}{2009} \text{ สำหรับ } i = 1, 2, 3, \dots, 2009$$

จงหาค่า $\sum_{i=1}^{2009} f(x_i)$

edupixel
unit of success

5. จงหาค่าของ $S = \sum_{j=1}^{100} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i \right)$

6. จงหาค่าของ $\left| \frac{1}{2\lfloor\sqrt{1}\rfloor+1} + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{2}\rfloor+1} + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{3}\rfloor+1} + \dots + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{100}\rfloor+1} \right|$



edupixel
unit of success

7. ให้ $M = \{m \in R / |\{x \in R / \sqrt{x-5} = m+1\}| = 2\}$ จงหา $|M \cap Z|$

8. ให้ $X = \{x \in R/x^4 + (2 - x)^4 = 34\}$ และ $A = \{[x]/x \in X\}$
จงหาผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน A

9. ให้ $f: R \rightarrow R$ โดยที่

$$f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) - 8$$

สำหรับทุก $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in R$ จงหา $f(0)$

edupixel
unit of success

10. ให้ x เป็นจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\text{จงหาค่าของ } x^9 + x^7 + x^{-9} + x^{-7}$$

ตอนที่ 2 ชุดเลขคณิตจำนวน 10 ข้อ (ข้อ 11 ถึงข้อ 20)

11. ให้ $S = \{(x, y, z) | x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

และ $X = \{(x, y, z) \in S | x \geq y + z \text{ หรือ } y \geq z + x \text{ หรือ } z \geq x + y\}$ จงหา $|X|$

12. ให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ จงหาจำนวนสับเซต S ของ A

โดยที่ผลบวกของสมาชิกที่น้อยที่สุดของ S กับสมาชิกที่มากที่สุดของ S เท่ากับ 13

13. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่มากที่สุด ที่ทำให้ $((n!)!)!$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $((2009!)!)!$



edupixel
unit of success

14. ให้ $U = \{10000, 10001, 10002, \dots, 99999\}$

และ $X = \{abcde \in U / a \times b \times c \times d \times e = 180\}$ จงหา $|X|$

15. ให้ $U = \{(a, b, c, d) / a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\}\}$ และ $A = \{(a, b, c, d) \in U / ac - bd = 0\}$ จงหา $|A|$

16. ให้ $X = \{1, 2, 3, \dots, 63\}$

จงหาจำนวนสับเซต S ของ X โดยที่ผลรวมของสมาชิกทุกตัวใน S เท่ากับ 2009

17. กำหนดลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci) F_1, F_2, F_3, \dots

โดย $F_1 = F_2 = 1$ และ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$

ให้ $X = \{n/1 \leq n \leq 1000 \text{ และ } 13 \text{ เป็นตัวประกอบของ } F_n\}$ จงหา $|A|$

18. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ 100 เป็นตัวประกอบ

ของ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

edupixel
unit of success

19. ให้ $N = 7777777777$ จงหา $\text{Sum}(N)^2$

20. ให้เงื่อนไขต่อไปนี้ในการพิจารณาคำตอบ

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ / a^2 + b^2 < 16\}$$

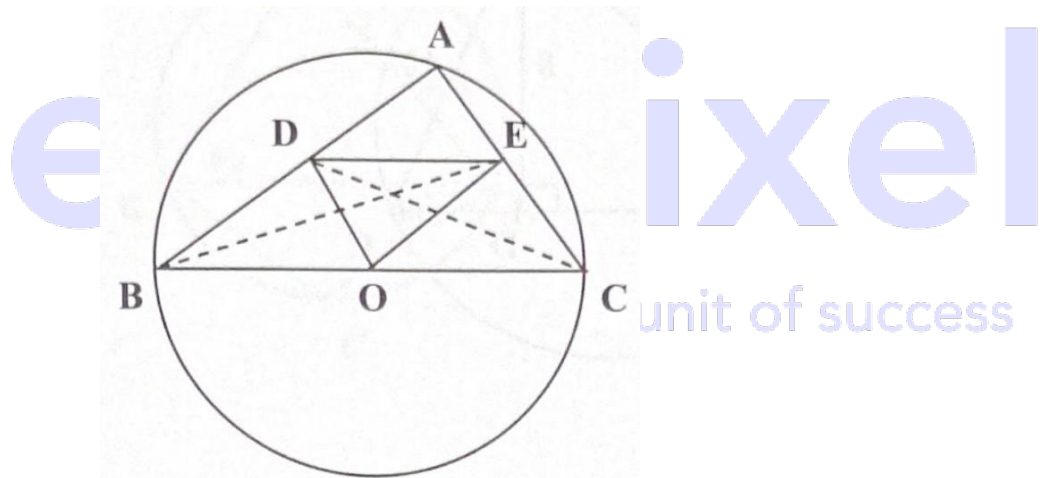
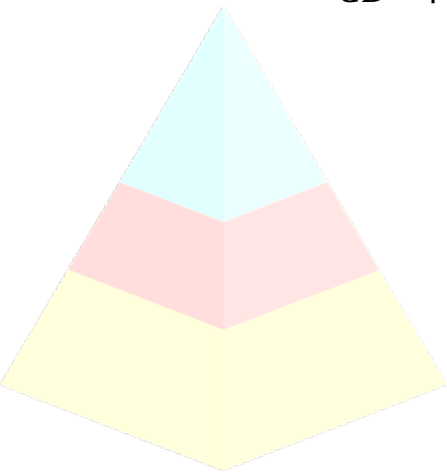
$$B = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ / a^2 + b^2 < 8a\}$$

$$C = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ / a^2 + b^2 < 8b\}$$

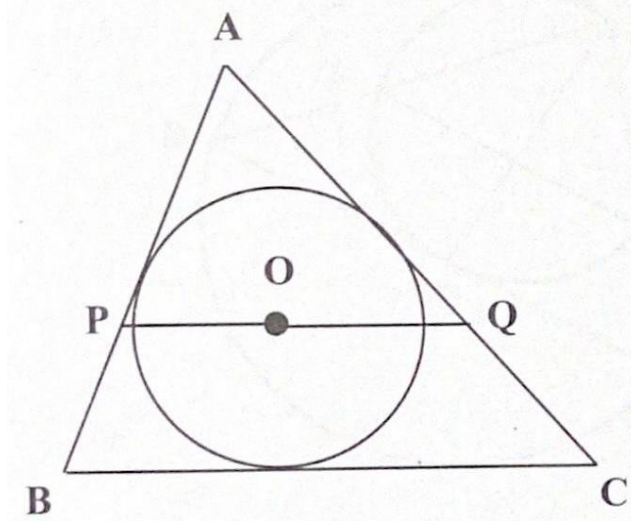
จงหา $|A \cap B \cap C|$

ตอนที่ 3 ชุดเรขาคณิตจำนวน 10 ข้อ (ข้อ 21 ถึงข้อ 30)

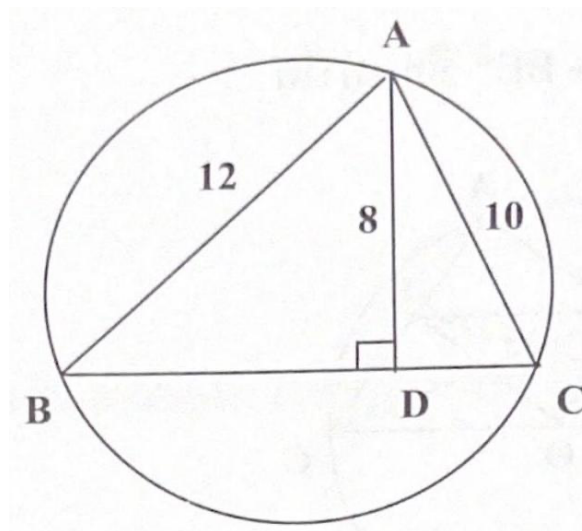
21. สามเหลี่ยม ABC มีวงกลม O ล้อมรอบสามเหลี่ยม จุด O อยู่บนด้าน BC ลาก OD, OE ตั้งฉากกับด้าน AB และ AC ที่จุด D และ E ตามลำดับ ถ้า DE ยาวเท่ากับ 4 แล้ว $CD^2 + BE^2$ มีค่าเท่าใด



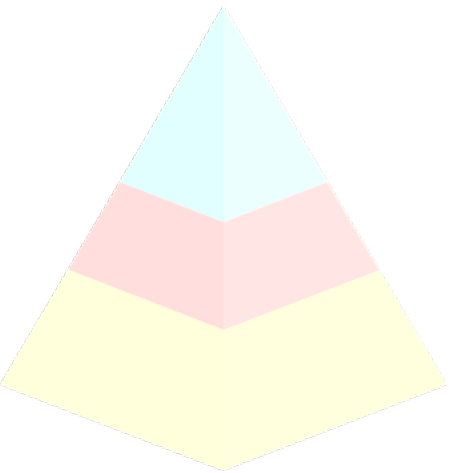
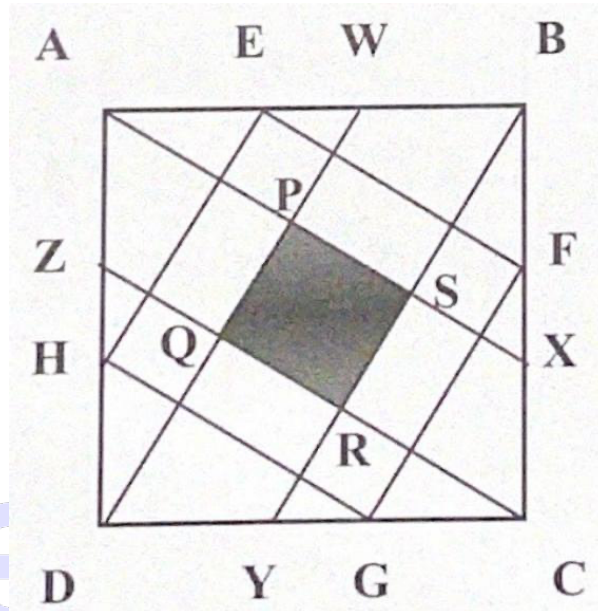
22. วงกลม O เป็นวงกลมแนบในสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีด้าน AB, BC และ AC ยาวเท่ากับ $20, 22, 24$ เซนติเมตร ตามลำดับ ถ้าลากเส้นตรงผ่านจุด O ขนานกับ BC พบด้าน AB ที่จุด P และพบด้าน AC ที่จุด Q แล้ว ความยาว PQ เท่ากับกี่เซนติเมตร



23. สามเหลี่ยม ABC มีด้าน $AB = 12, AC = 10$ และเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด A มายังฐาน BC ยาวเท่ากับ 8 ถ้า R แทนรัศมีวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC แล้ว R มีค่าเท่ากับเท่าใด

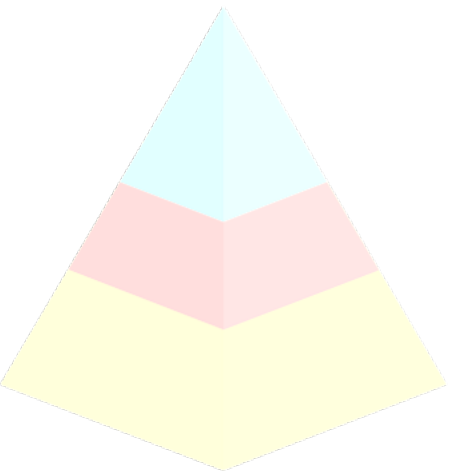
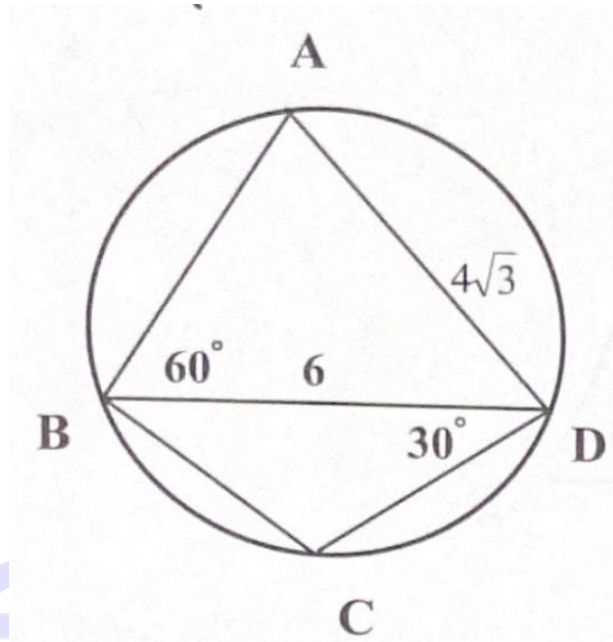


24. สี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ a ตารางหน่วย จุด E, F, G, H เป็นจุดแบ่งด้านทั้งสี่ โดยที่ $AE:EB = BF:FC = CG:GD = DH:HA = 3:4$ ตามลำดับ ถ้า AX ขนานกับ EF BY ขนานกับ FG CZ ขนานกับ GH และ DW ขนานกับ HE แล้วพื้นที่แรเงาเป็นกี่เท่าของสี่เหลี่ยม $ABCD$



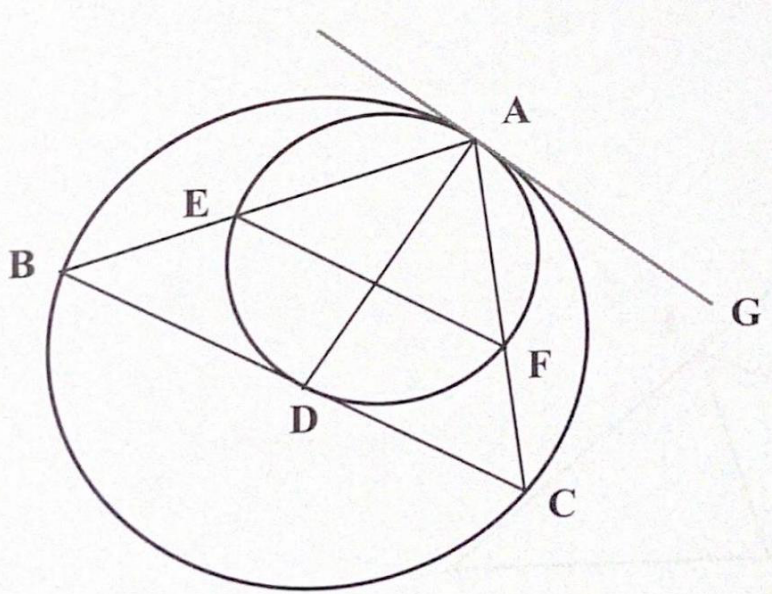
Education Pixel
unit of success

25. สี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม มีด้าน AD เท่ากับ $4\sqrt{3}$ และ BD เท่ากับ 6 มุม $ABD = 60$ องศา มุม $BDC = 30$ องศา ตามลำดับ แล้วอัตราส่วน $BC:BD$ เท่ากับเท่าใด

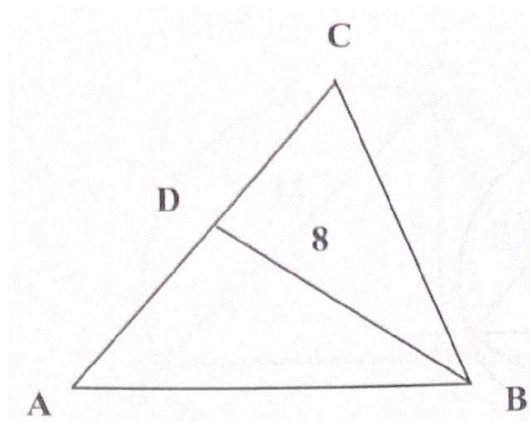


educationpixel
unit of success

26. วงกลม 2 วงสัมผัสกันภายในที่จุด A คอร์ด BC ของวงกลมวงใหญ่สัมผัสกับวงกลมวงเล็ก ที่จุด D ลาก AB, AC ตัดวงกลมวงเล็กที่จุด E และ F ทำให้ $AE:EB = AF:FC$ ถ้ามุม $GAF = 32$ องศาและ มุม $ADC = 74$ องศา แล้วมุม BAC กางกี่องศา



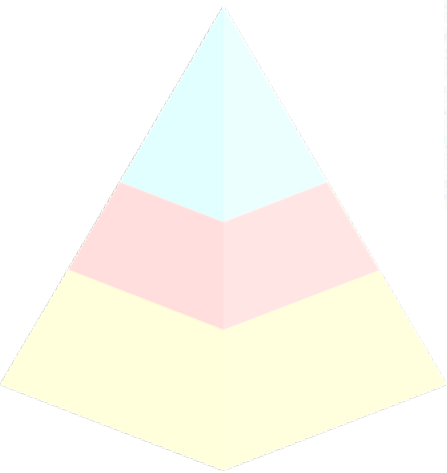
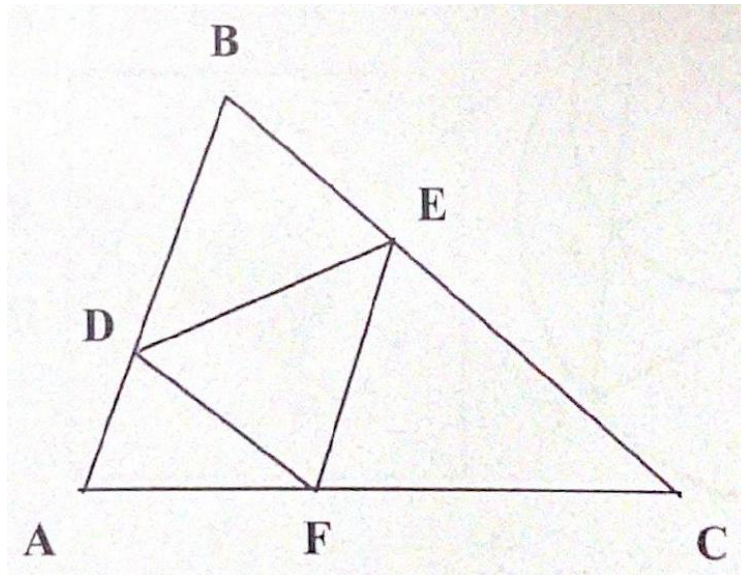
27. สามเหลี่ยม ABC มีมุม $CAB = 45$ องศา มุม $CBA = 60$ องศา เส้นแบ่งครึ่งมุม B พบด้าน AC ที่จุด D ทำให้ BD ยาวเท่ากับ 8 หน่วย แล้วพื้นที่สามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับกี่ตารางหน่วย



28. สามเหลี่ยม ABC มีจุด D, E, F เป็นจุดแบ่งด้าน AB, BC, AC ตามลำดับ

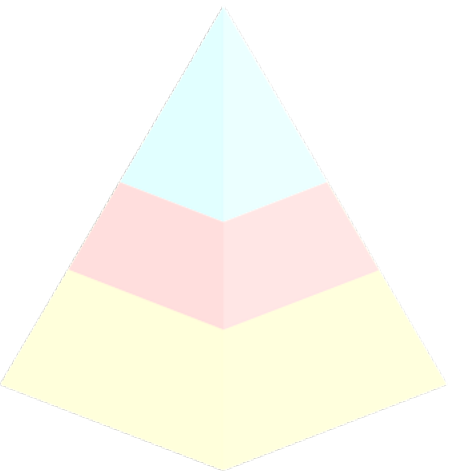
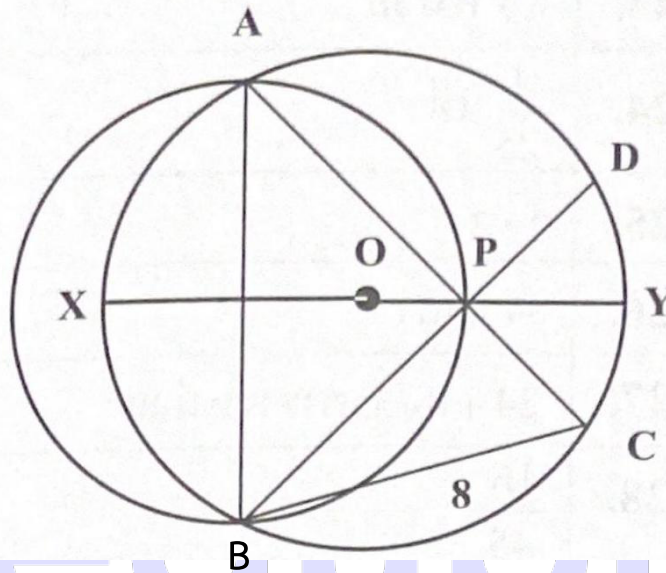
โดยที่อัตราส่วน $\frac{AD}{AB} = a, \frac{BE}{BC} = b, \frac{CF}{CA} = c$

และกำหนดให้ $a + b + c = \frac{2}{3}, a^2 + b^2 + c^2 = \frac{2}{5}$ แล้ว $\frac{[DEF]}{[ABC]}$ มีค่าเท่าใด



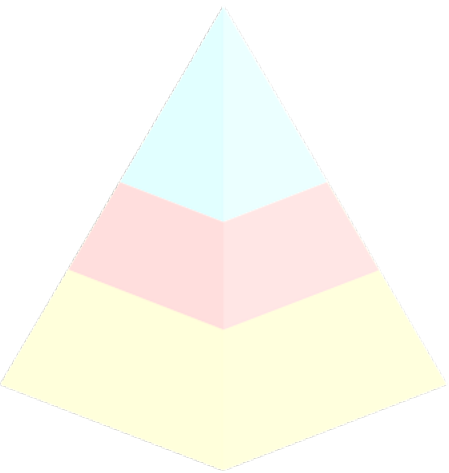
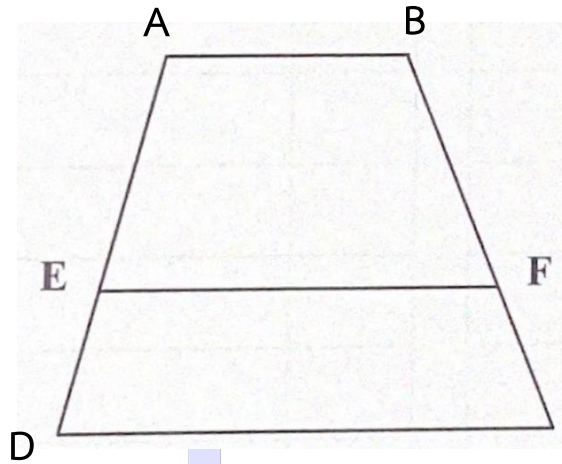
educationpixel
unit of success

29. วงกลม O มี XOY เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง คอร์ด AB แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ XO
 เขียนวงกลมให้ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ตัด OY ที่จุด P ต่อ AP และ BP ออกไปพบ
 เส้นรอบวงวงกลม O ที่จุด C และ D ตามลำดับ ต่อ BC ถ้า BC ยาวเท่ากับ 8 หน่วย แล้ว
 AB ยาวเท่าใด



educationpixel
 unit of success

30. สี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มี AB ขนานกับ CD ถ้า $AB = 3, BC = 6, CD = 8$ และ $DA = 4$ ตามลำดับ ส่วนของเส้นตรง EF ขนานกับ AB ทำให้เส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยม $ABFE$ เท่ากันกับเส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยม $EFCD$ แล้ว EF ยาวเท่าใด



edupixel
unit of success